Geschiedenis van de wiskunde inzetten in wiskundelessen

Johan Deprez, jaarvergadering VVWL, Antwerpen, 14/3/26

slides komen online op mijn website (www.johandeprez.be)

Kennismaking

- sinds 1/10/24 emeritus ‘met opdracht’
- 30 jaar docent wiskunde (basiswiskunde in economische en biomedische opleidingen)
- 30 jaar praktijkassistent en docent vakdidactiek wiskunde (UAntwerpen, KU Leuven)
- redactielid van Uitwiskeling
- pas (relatief) recent betrokken bij geschiedenis van de wiskunde, geen specialist op dit terrein

  ik geef nu voor de vijfde keer Geschiedenis van de wiskunde, keuzevak in de master wiskunde en in de educatieve master

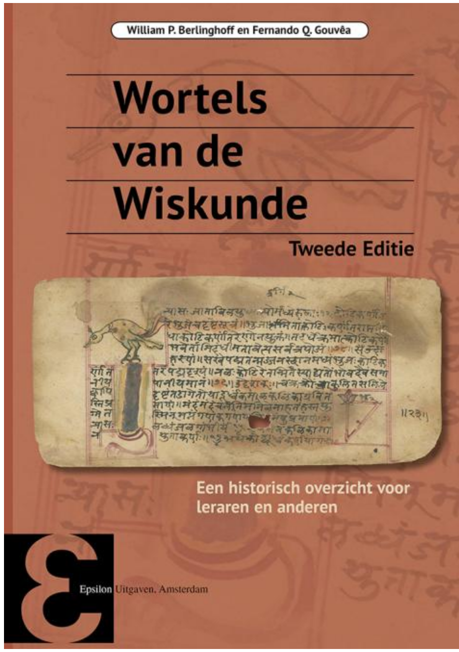
Vóór we van start gaan…

- er valt veel meer te vertellen over geschiedenis van de wiskunde dan wat er past in een lezing van een uur
- daarom: enkele goede bronnen waar je (veel) meer kunt vinden
  - boek Wortels van de wiskunde. Een historisch overzicht voor leraren en anderen

    (https://www.epsilon-uitgaven.nl/)
  - bijbehorende reeks artikelen in het tijdschrift Euclides

    (http://www.jeaninedaems.nl/wp-content/uploads/2014/08/Euclides_serie_Wortels-van-de-Wiskunde.pdf)
  - een aantal Zebraboekjes

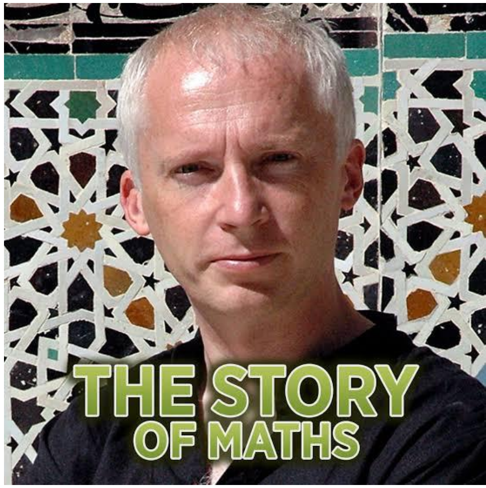
    (https://www.epsilon-uitgaven.nl/)



Vóór we van start gaan…

- …
- daarom: enkele goede bronnen waar je (veel) meer kunt vinden
  - Negen fragmenten uit de geschiedenis van de wiskunde, Uitwiskeling 39/3
  - en nog veel andere bijdragen in dit tijdschrift en in Wiskunde en Onderwijs

    (https://www.uitwiskeling.be/ en https://www.vvwl.be)
  - The story of math (reeks van vier documentaires door Marcus du Sautoy)
  - en nog zoveel andere bronnen…



KU LEUVEN

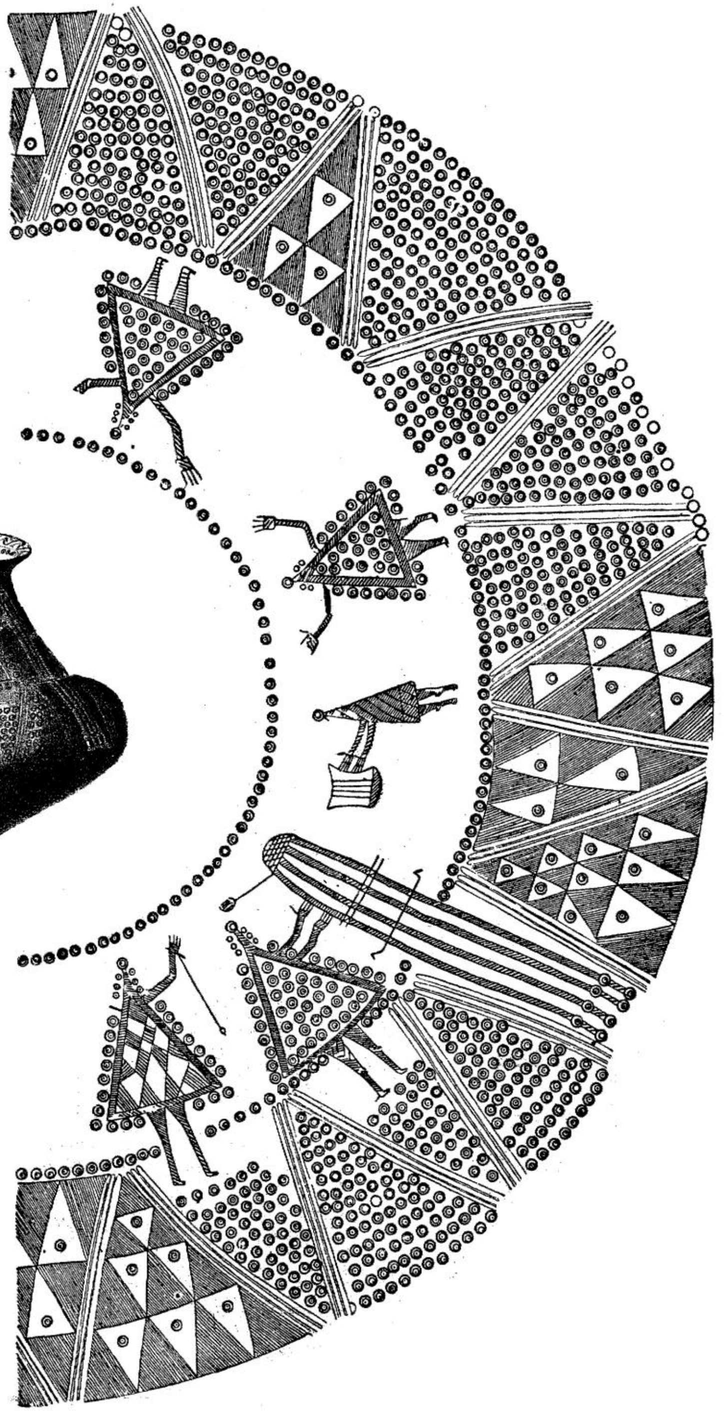
Inhoud van deze lezing

- Niet: een kort overzicht van de geschiedenis van de wiskunde
- Niet: resultaten van eigen onderzoek
- Enkele voorbeelden
- (Bijna uitsluitend) uit de meetkunde
- Hier en daar een klassieker maar ook minder bekend
- ‘Oude’ voorbeelden
- Wat context over de oude beschavingen waaruit deze voorbeelden stammen
- Bruikbaar in de klas?
- Tussendoor wat commentaar: wat kunnen de voorbeelden bijdragen aan het beeld van wiskunde van de leerlingen?

Een prehistorisch voorbeeld

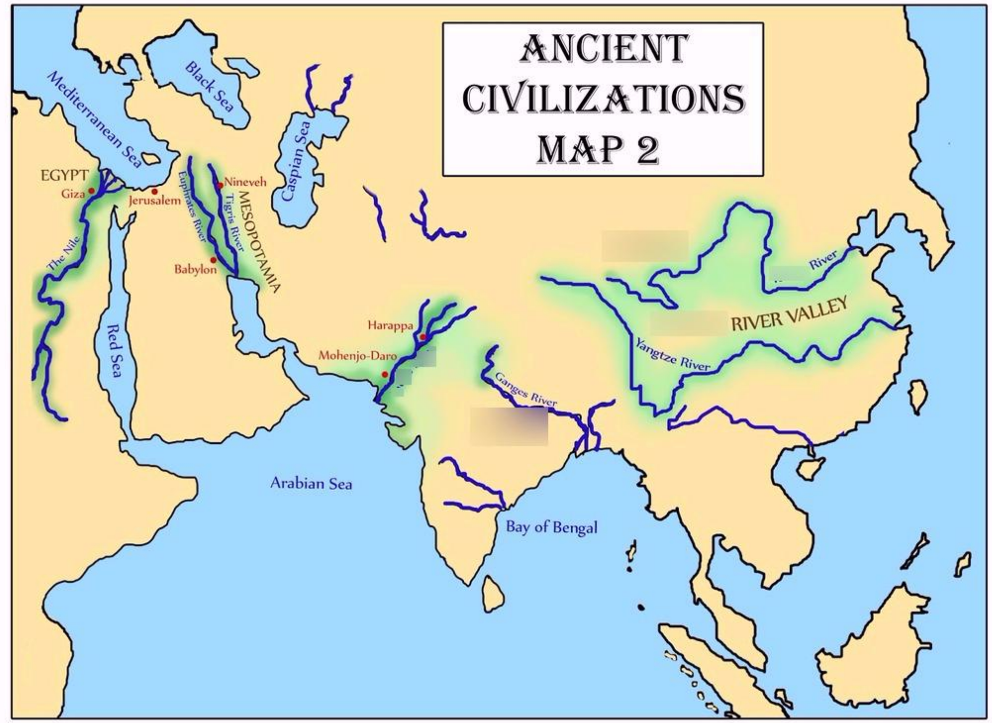
Metalen pot uit Ödenburg, Hongarije

- bron: Lietzmann, W. “Geometrie Und Prähistorie.” Isis, vol. 20, no. 2, 1934, pp. 436–439.
- uit Hallstatt-tijd (1000-500 BC)
- zie bv. de onderverdeling in congruente driehoeken: gelukt voor verdeling in 9 en 16, niet voor 25
- meetkundige elementen vind je ook terug op aardewerk, kleren en doeken, vlechtwerk voor manden, …



Vier grote oude beschavingen

- ontstaan van irrigatie-economieën langs de oevers van grote rivieren
  - Mesopotamië: Tigris en Eufraat
  - Egypte: Nijl
  - China: Hoang-ho (Gele Rivier, noorden) en Yang-tse (Lange Rivier, zuiden)
  - India: Indus (westen) en Ganges (oosten)



- wat?

  grotere bevolkingsconcentraties: steden / handel, complexere bestuursvormen / ontstaan van een hogere klasse / vaak verweven met godsdienst / nood aan organisatie en administratie / ontstaan van schrift en wiskunde / schrijven en rekenen door een beperkte groep

Een oud voorbeeld uit Mesopotamië

Een ‘oud’ voorbeeld uit Mesoptamië

- bron: Robson, E. (2009). Mesopotamian Mathematics. in: Katz, V., The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook. Princeton and Oxford: Princeton University Press
- kleitablet W 19408.76
- Uruk, 3200 BC (Mesopotamië, niet Babylon!)
- tempel van Inana
- tablet hergebruikt in heropbouw van de tempel
- kleitablet bevat berekening van de oppervlakte van twee velden

  tempel bezat veel gronden voor landbouw en veeteelt

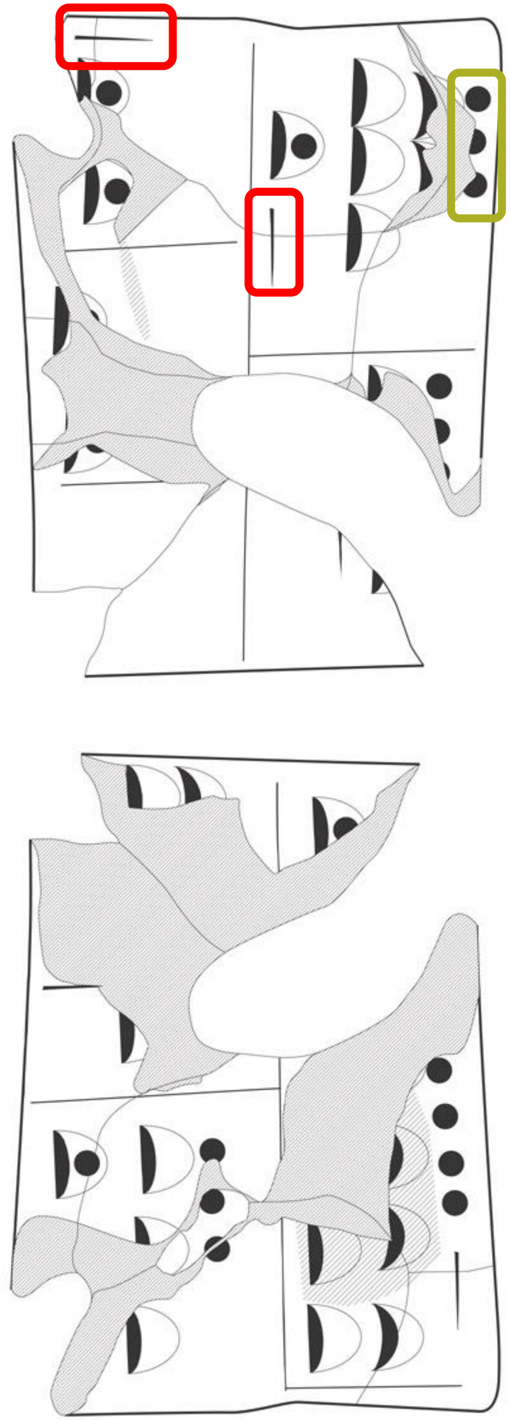
veld 1 – twee ‘breedtes’ en twee ‘lengtes’

Obverse	— 600 600	600 60 60 10 10 I 60 60 10 60
	600 600 —	600 60 60 10 10 I 60 60 10
Reverse	600 60 60 60 60 — 60 10 10 60	600 60 600 10 10 I
	600 60 10 10 600 60 10 10 — 60	60 60 10 10 60 60 10 10 60 60 I 60 60

hier nog geen positietalstelsel!

1 rod

Length units: ≈ 3.6 km ≈ 360 m ≈ 60 m ≈ 6 m



Een ‘oud’ voorbeeld

— 600 600	600 60 60 10 10 I 60 60 10 60
600 600 —	600 60 60 10 10 I 60 60 10

$$\{(2\times600)+(2\times600)\}/2\times$$
$$\{(600+5\times60+3\times10)+(600+4\times60+3\times10)\}/2$$
$$=(1200+1200)/2\times(930+870)/2$$
$$=1200\times900\ \text{(rods)}=1{,}080{,}000\ \text{(area sar)}$$
$$=600\ \text{(area bur)}$$

- berekening van de oppervlakte
- via (benaderende?) formule (‘agrimensor’s method’)

$$A=(l_1+l_2)(b_1+b_2)/4$$

- praktische wiskunde!
- maar toch wat kunstmatig (bv. ronde uitkomst): gebruikt voor scholing
- anders dan de meeste kleitabletten (registratie transacties, bezittingen, …)

KU LEUVEN

Terugblik

- dragers zijn kleitabletten: (relatief) goed bewaard gebleven, dus (relatief) veel bronnenmateriaal
- kleitabletten bevatten (o.a.) voorbeeldproblemen met hun oplossingsmethode
  - bedoeld om een algemene oplossingsmethode te tonen
  - ook al wordt ze niet in het algemeen geformuleerd
  - geen verklaring waarom de oplossingsmethode werkt (maar wellicht was zo'n verklaring wel bekend)
- het 'echte' werk (allerhande administratie) maar ook voor scholing
- dat er in de geschiedenis voor eenvoudige zaken als oppervlakte van een vierhoek aanvankelijk 'verkeerde' formules gebruikt werden, kan helpen om in te zien dat de huidige kennis niet in één-twee-drie ontstaan is

Twee voorbeelden uit Egypte

Oppervlakte van een cirkel

- oppervlakte van een cirkel met diameter 9 (eenheden)
- met moderne ogen bekeken
  - formule voor oppervlakte A in functie van straal r:
  - benadering voor π
  -

Rhind Mathematical Papyrus, Problem 50

***Method of calculating** a circular **area** of 9 ḫt*
What is its amount as area?
You shall subtract its (i.e., the diameter's) $\bar{9}$ as 1,
while the remainder is 8.
You shall multiply 8 times 8.
It shall result as 64.
It is its amount as area: 64 *sṯȝ.t*.

Calculation how it results: 9 *ḫt*

.	9
its $\bar{9}$	1

subtraction from it, remainder: 8

.	8
2	16
4	32
\8	64

Its amount as area: 64 *sṯȝ.t*.

KU LEUVEN

Volume afgeknotte piramide

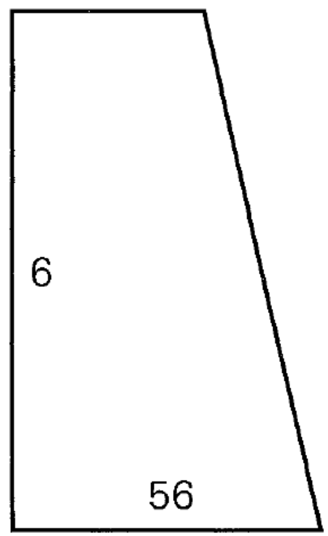
- volume van een afgeknotte, rechte piramide met vierkant grond- en bovenvlak
- vertaal in moderne termen: welke formule?
-

Moscow Mathematical Papyrus, Problem 14

Method of calculating a .

If you are told of 6 as height, of 4 as lower side, and of 2 as upper sid
You shall square these 4. 16 shall result.
You shall double 4. 8 shall result.
You shall square these 2. 4 shall result.
You shall add the 16 and the 8 and the 4. 28 shall result.
You shall calculate $\bar{3}$ of 6. 2 shall result.
You shall calculate 28 times 2. 56 shall result.
Look, belonging to it is 56.
What has been found by you is correct.

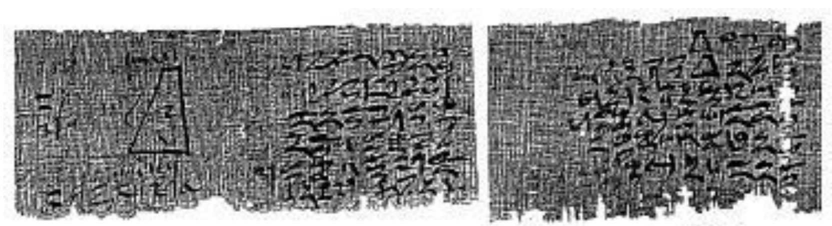
2, squared 4



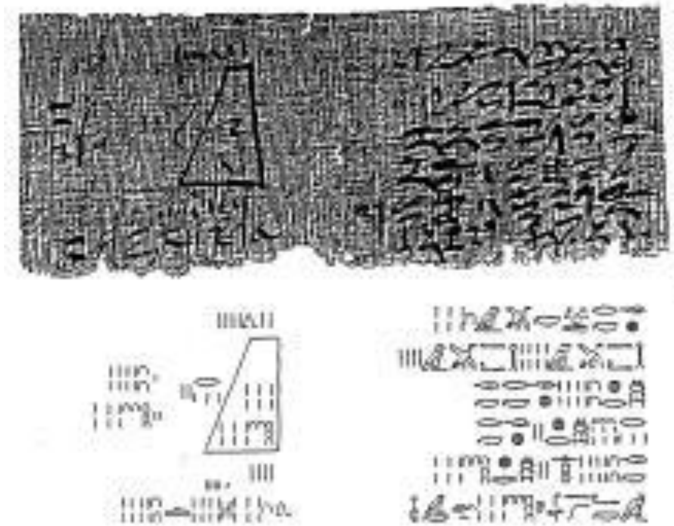
4, squared 16

. 4
2 8 total 28

$\bar{3}$ 2 . 28
2 56



Terugblik



- Rhind Papyrus
  - rond 1650 BC
  - geschreven door ‘Ahmes’
  - gebaseerd op (iets) ouder prototype
  - 1858: aankoop door Henry Rhind in Luxor
  - sinds 1920 in British Museum
- Moscow Papyrus
  - ongeveer 1890 BC
  - aangekocht in 1893
  - Pushkin Museum of Fine Arts, Moscow

- studie van deze bronnen startte in de 19de eeuw
- papyrus is veel kwetsbaarder dan kleitabletten → veel minder bronnenmateriaal uit Egypte dan uit Mesopotamië

KU LEUVEN

Twee soorten wiskunde bij de Oude Grieken

Context

- andere context dan Mesopotamië en Egypte: relatief kleine stadstaten en handelskolonies langs de kusten
- dit hangt samen met een andere cultuur
- recenter: 8ste eeuw voor Christus tot 5de eeuw na Christus

Ook hier praktische wiskunde …

- tunnel van Eupalinus
- ong. 550-530 BC
- deel van watertoevoer-systeem voor de stad Samos (eiland voor de Ionische kust)
- over een lengte van ong. 1 km onder een heuvel

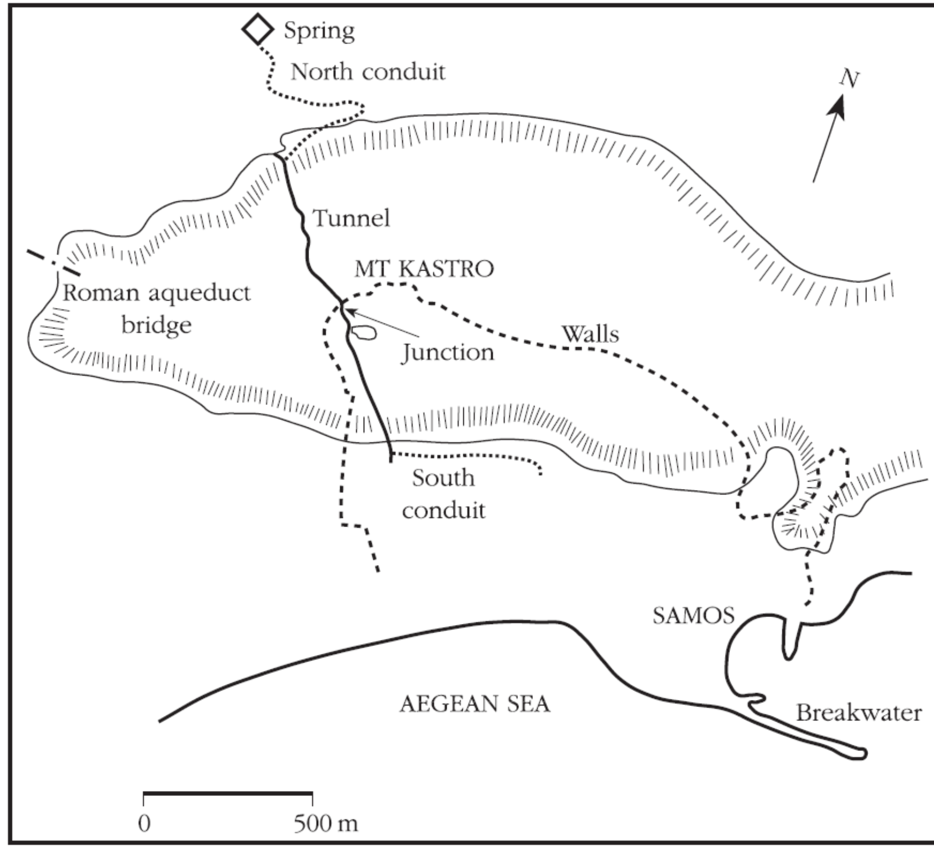


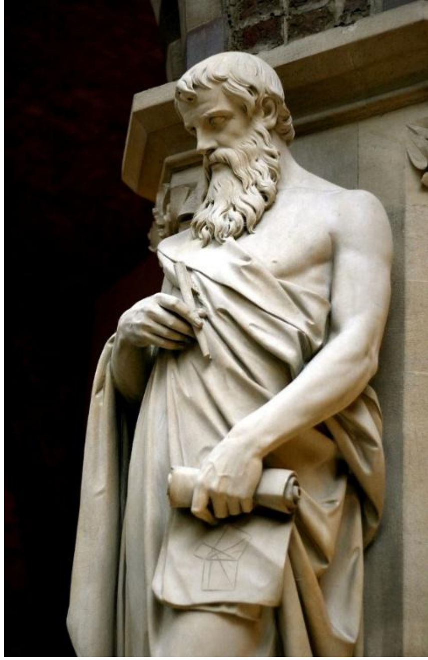
Figure 1.2 The Eupalinus tunnel
(reproduced with permission from Rihll and Tucker (1995), p. 406, fig. 18.2)

- twee teams van werklieden groeven de tunnel vanuit de twee uiteinden
- op te lossen problemen: beide uiteinden op gepaste hoogte, elkaar ontmoeten in het midden, …

Maar natuurlijk ook een heel andere wiskunde

- beter bekend onder wiskundigen
- geassocieerd met Plato (en Aristoteles)
- beschrijven van een perfecte ideeënwereld
- theoretisch, algemeen, abstract, zuiver, aandacht voor de grondslagen, …
- accent op argumenteren en redeneren vanuit een beperkt aantal aannames

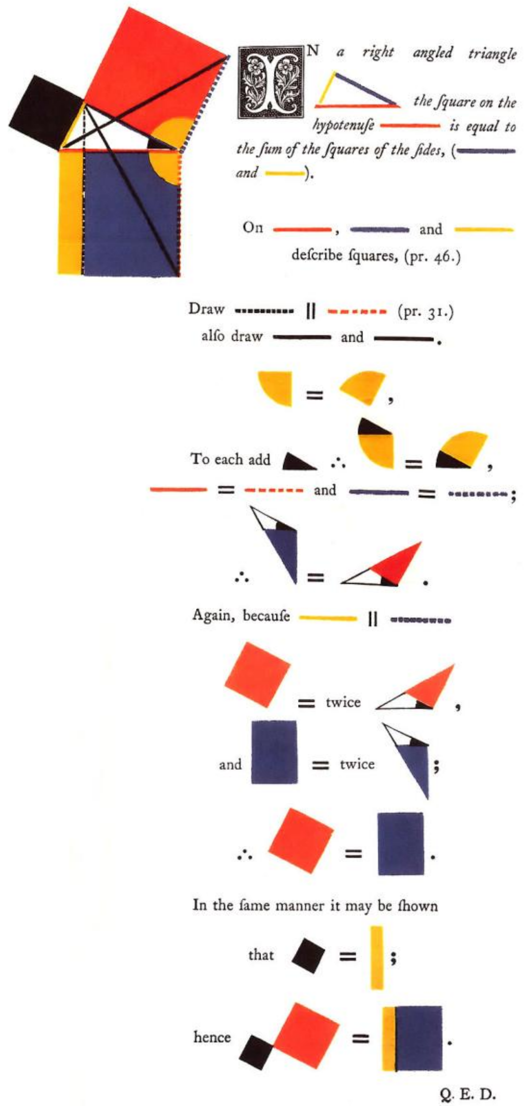
De Elementen van Euclides



- Context
  - 323 BC: dood van Alexander de Grote, rijk valt uiteen
  - na ong. 300 BC heerst Ptolemeïsche dynastie over Egypte
  - stad Alexandrië in Egypte wordt centrum van de wiskunde
- Euclides, ong. 300 v.Chr.
- ook eerdere auteurs schreven Elementen, maar niet bewaard gebleven
- niet de verzameling van alle tot dan toe gekende wiskunde, wel een inleidend handboek met alle elementaire wiskunde
- steunde op voorgangers: Pythagoreërs, Hippocrates, Eudoxos, Theaetetus, ..., maar bevat ook nieuwe kennis
- in de traditie van Plato en Aristoteles
- systematische opbouw van de behandelde kennis

Hoe kennen we de Griekse wiskunde?

- aanvankelijk op papyrus
- veel werken zijn helemaal verloren gegaan
- De Elementen van Euclides zijn via kopieën, kopieën van kopieën, … blijven bestaan
- klein stukje kopie via papyrus Oxyrhynchus uit ong. 100 AD, ontdekt rond 1900
- bij het kopiëren werden fouten gemaakt / aanvullingen gemaakt / vereenvoudigingen doorgevoerd / ‘verbeteringen’ aangebracht / …
- een heel aparte editie: Byrne, 1847



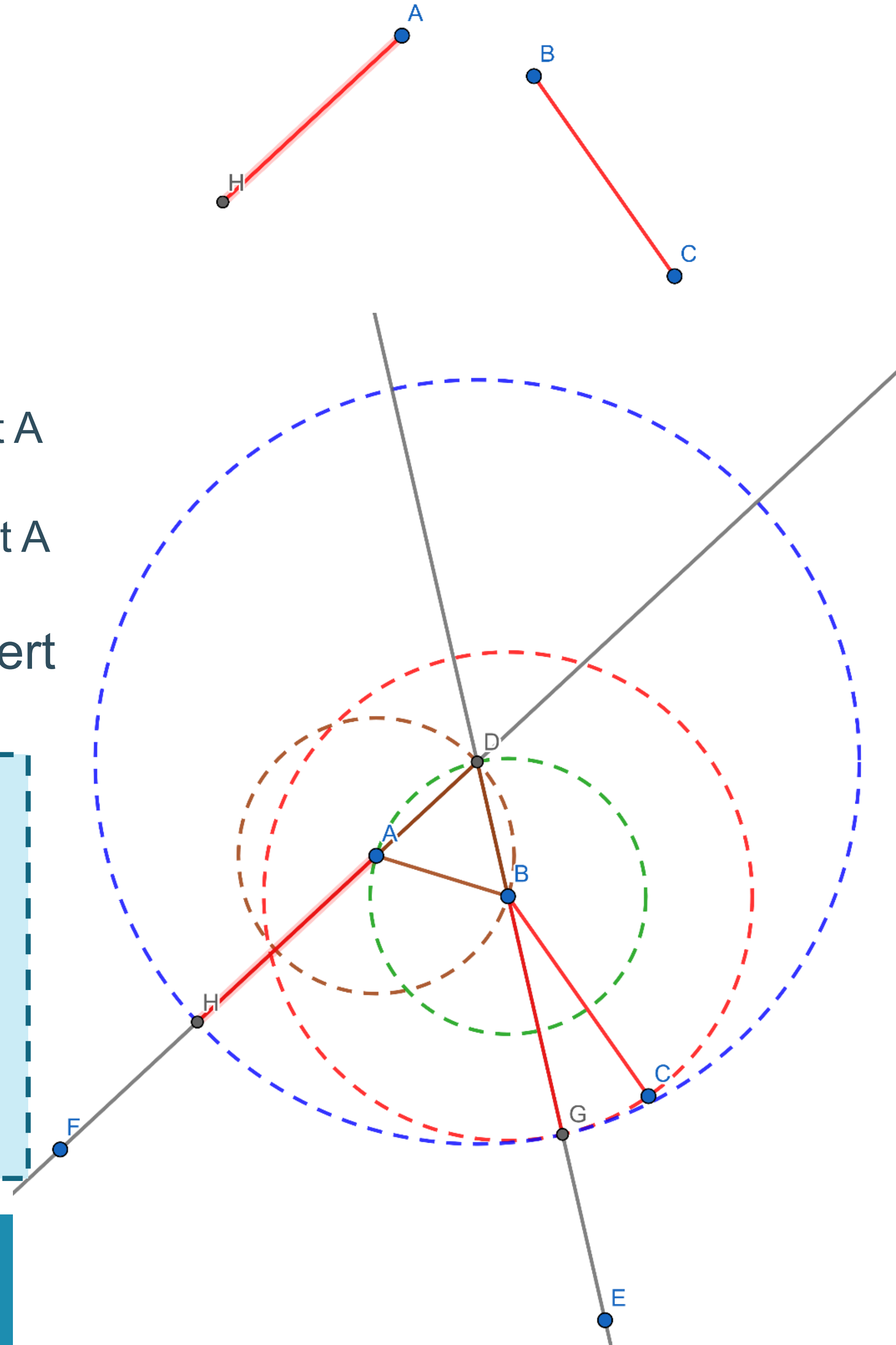
De start

- 23 definities
  - bv. “Een rechte is lengte zonder breedte” …
- 5 postulaten
  - bv. “Het is mogelijk een rechte lijn te trekken van een punt tot een ander punt.” …
- 5 axioma’s
  - bv. “Dingen die gelijk zijn aan een derde, zijn ook onderling gelijk.” …
- axioma’s in de huidige betekenis komen eerder overeen met de postulaten van Euclides i.p.v. met zijn axioma’s
- de definities zijn geen definities in de huidige betekenis; in feite basisbegrippen die juist <u>on</u>gedefinieerd blijven (net zoals je postulaten/ axioma’s kunt zien als onbewezen eigenschappen)

KU LEUVEN

Derde postulaat

- “Het is mogelijk een cirkel te construeren met een gegeven middelpunt en een gegeven straal.”
  - ruime interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal BC
  - strikte interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal AH
- Propositie 2 uit boek 1: ‘strikt’ impliceert ‘ruim’



Terugblik

kennismaken met de manier waarop de Oude Grieken aan wiskunde deden, bijvoorbeeld door iets te laten zien uit De Elementen van Euclides, kan voor leerlingen een kennismaking zijn met een manier om aan wiskunde te doen die tegenwoordig minder nadruk krijgt

De stelling van Pythagoras: Griekenland, China en India

De Elementen Boek 1 Propositie 47

- (rechtstreekse) stelling van Pythagoras
- opp. AFGC

  = 2 maal opp. AFB

  = 2 maal opp. ACD

  = opp. rechthoek ADL
- …

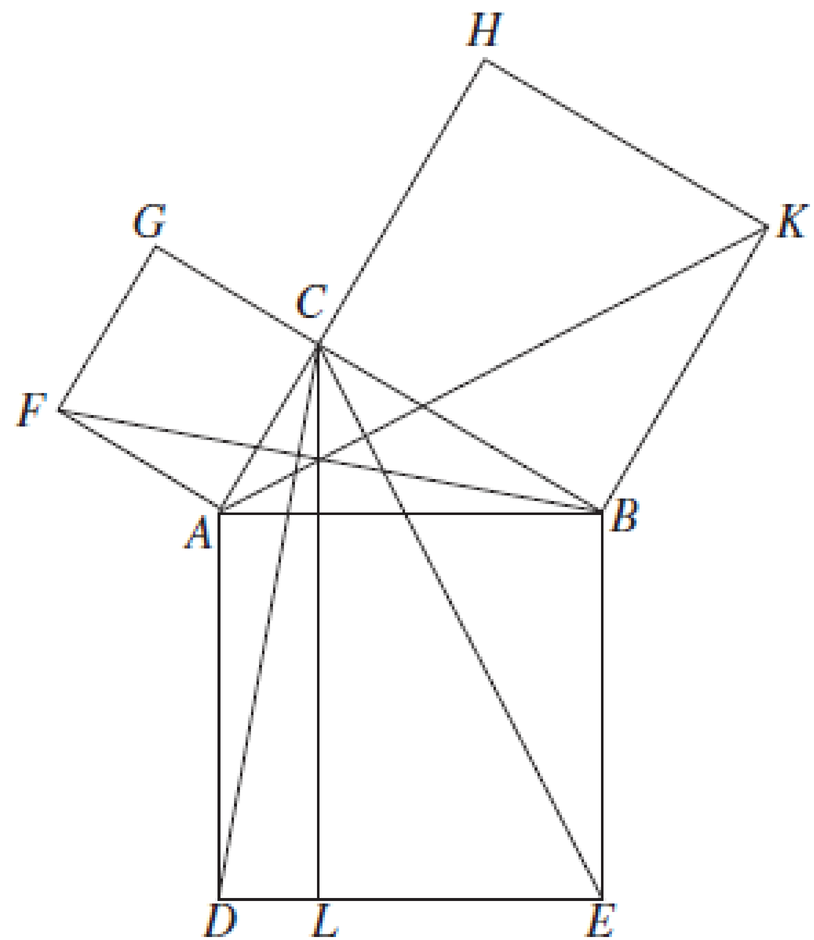
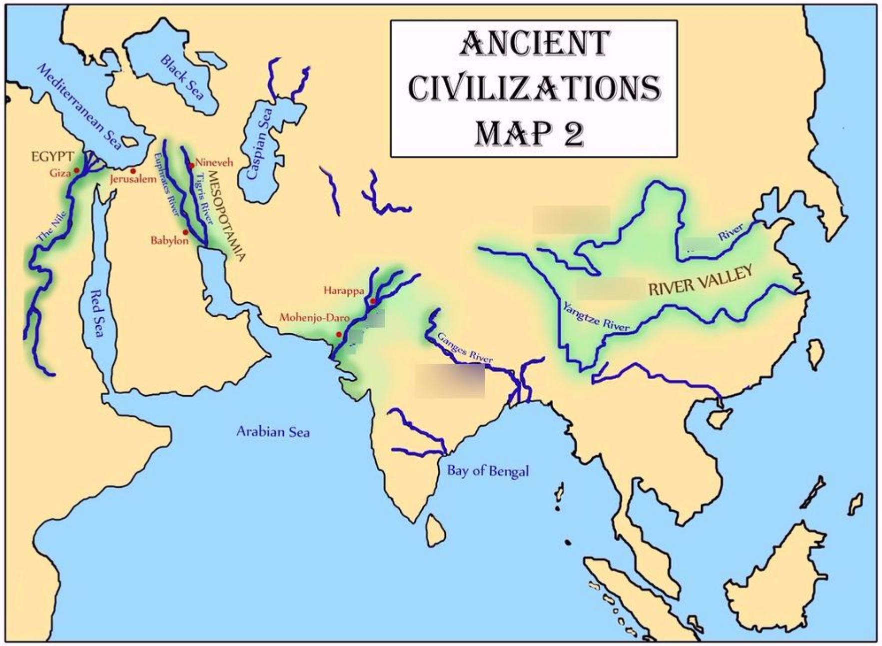


FIG. 5.4

China



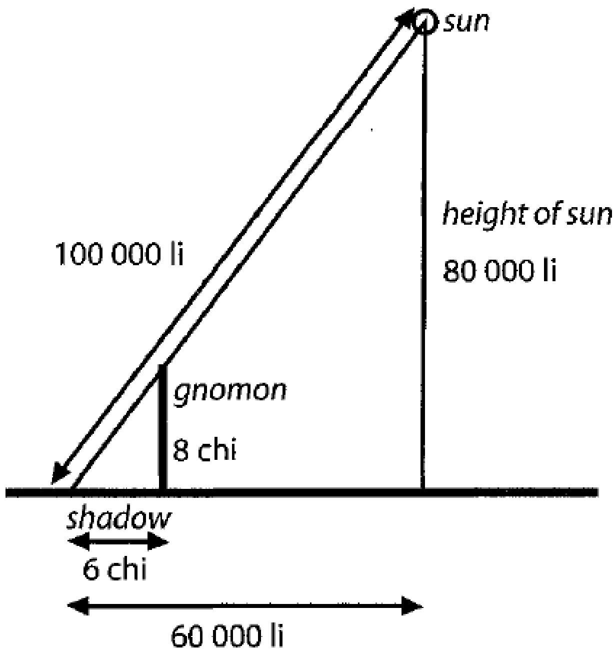
- start rond 2000 v.Chr. rond de Gele Rivier in het noorden, maar geen geschreven bronnen
- vanaf 400 v.Chr. tot 1600 n.Chr.
- geschriften op bamboebladeren, zijde, papier
- centrale rol voor staatsexamens om ambtenaar te kunnen worden
- tien klassieke geschriften als voorbereiding op de examens

  bekendste werk: Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde (ook andere benamingen)
- rijke geschiedenis op het vlak van wiskunde

  naast wat we hier bespreken: oplossen van stelsels van eerstegraadvergelijkingen met de methode van Gauss-Jordan, driehoek van Pascal
- … maar eerder behoudsgezind: weinig evolutie in de tijd

Gou-gu

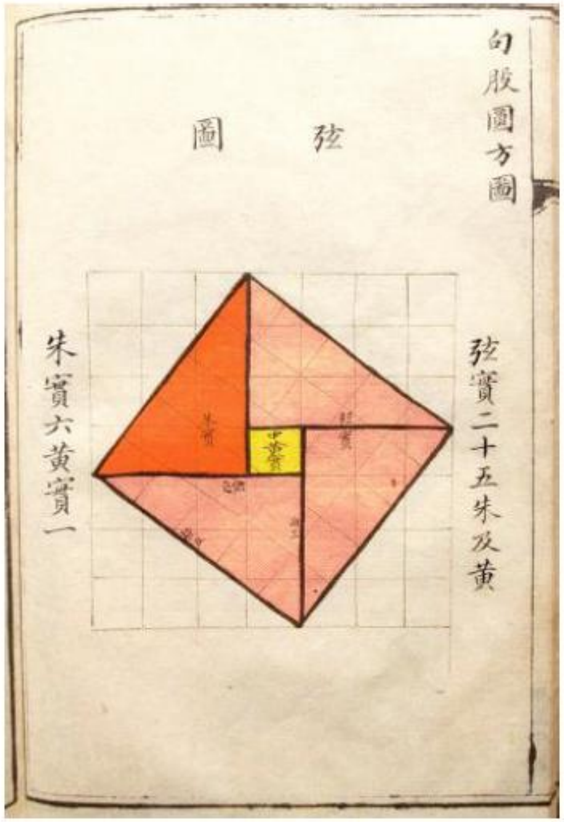
- bronnen:
  - Dauben, J. (2009). Chinese Mathematics. in: Katz (zie eerder)
  - Dauben, J. (2019). The evolution of mathematics in Ancient China. From the newly discovered Shu and Suan shu shu bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, *Revista Brasileira de História da Mathematica, Vol 19*, N° 37, 25-78
- Chinezen benoemden het concept driehoek niet
- in plaats daarvan
  - gu = hoogte / gou = schaduw = basis / xian = snaar



KU LEUVEN

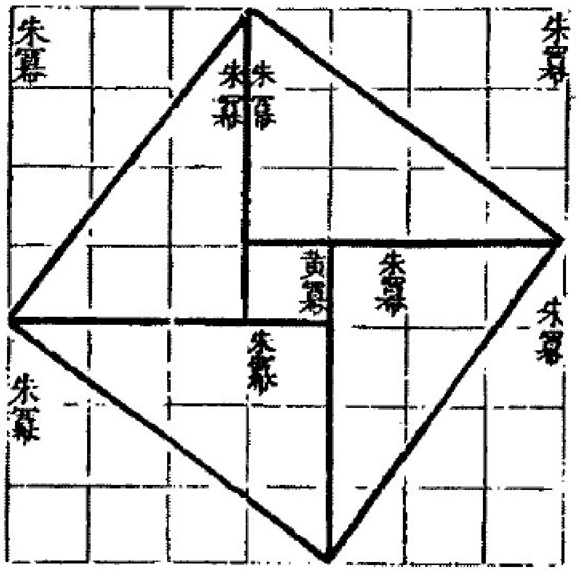
Gou-gu-relatie: de Chinese versie van de stelling van Pythagoras

- figuur hiernaast komt uit Zhou bi suan jing (The Mathematical Classic of the Zhou Gnomon, 1ste eeuw v.Chr.)
- bijbehorende tekst beschrijft hoe je uit de gou (basis) en de gu (hoogte) de xian vindt
  - neem 4 keer het product van gou en gu
  - tel er het kwadraat van het verschil tussen gou en gu bij op
  - dit is het kwadraat van de xian
- Liu Hui in Jiu zhang suan shu, Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde
  - 3de eeuw n.Chr. op basis van werk uit de 1ste eeuw v.Chr
  - ‘onze’ vorm van de stelling van Pythagoras
  - …

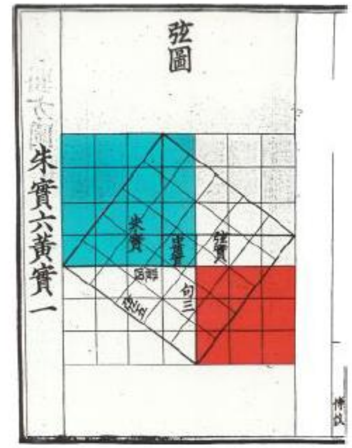


Gou-gu-relatie: de Chinese versie van de stelling van Pythagoras

- Liu Hui in Jiu zhang suan shu, Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde
  - …
  - argumentatie voor de algemene geldigheid
  - tekst is bewaard gebleven maar de begeleidende figuur niet
  - redenering is hierdoor niet met zekerheid te reconstrueren
  - figuur hiernaast is reconstructie uit de 15de eeuw in de Yongle dadian (Grote canon van de Yongle-periode, een Chinese encyclopedie)



Bewijs van gou-gu-relatie via out-in-principe



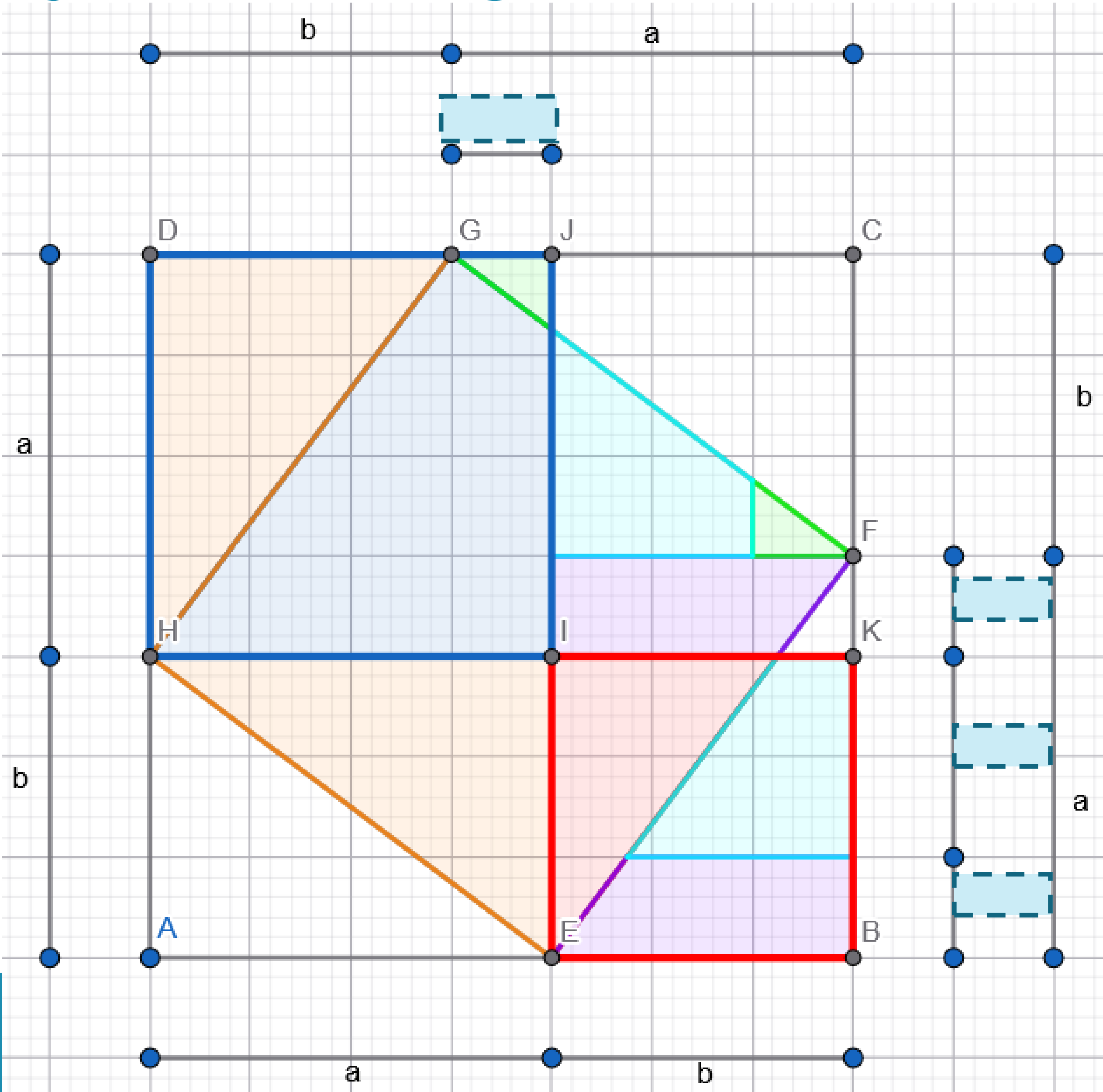
- reconstructie van het bewijs door Li Huang (1810)
- verplaats de delen van de kleine vierkanten die <u>buiten</u> het grote vierkant liggen naar <u>binnen</u> het grote vierkant
- … op de volgende manier

Gou-gu-relatie en het out-in-principe

- Chinese wiskundigen toonden wel interesse voor het verantwoorden van hun methoden, maar anders dan de Grieken
  - geen axiomatisch opgebouwde theorie
  - wel via voorbeelden, figuren, verantwoorden waarom een methode werkt, soms enkel voor een bepaalde categorie, …
- Liu Hui wilde een 'bewijs' dat niet enkel voor de 3-4-5-driehoek geldt
  - klopt dit puzzelbewijs ook voor een algemene driehoek met rechthoekszijden $a \geq b$ en schuine zijde c?
  - zie volgende slides!

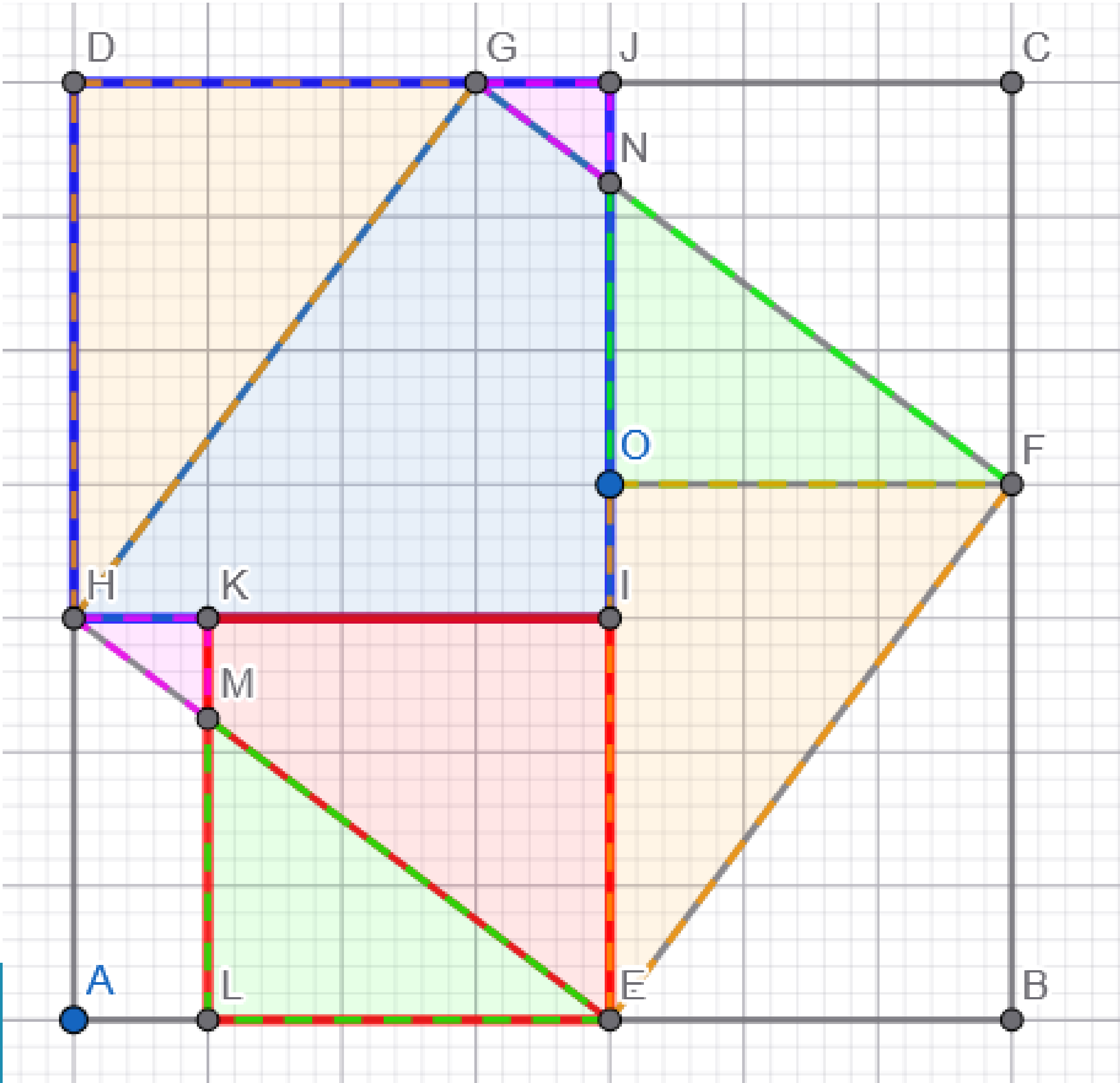
Klopt het bewijs in het algemeen?

- d.w.z. voor rechthoekige driehoeken met rechtszijden $a \geq b$ en schuine zijde c?



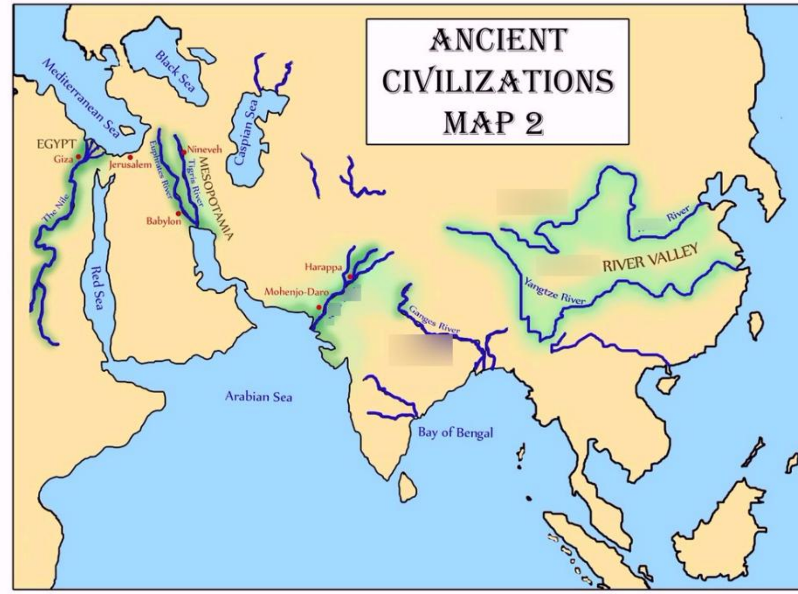
Nog een puzzelbewijs

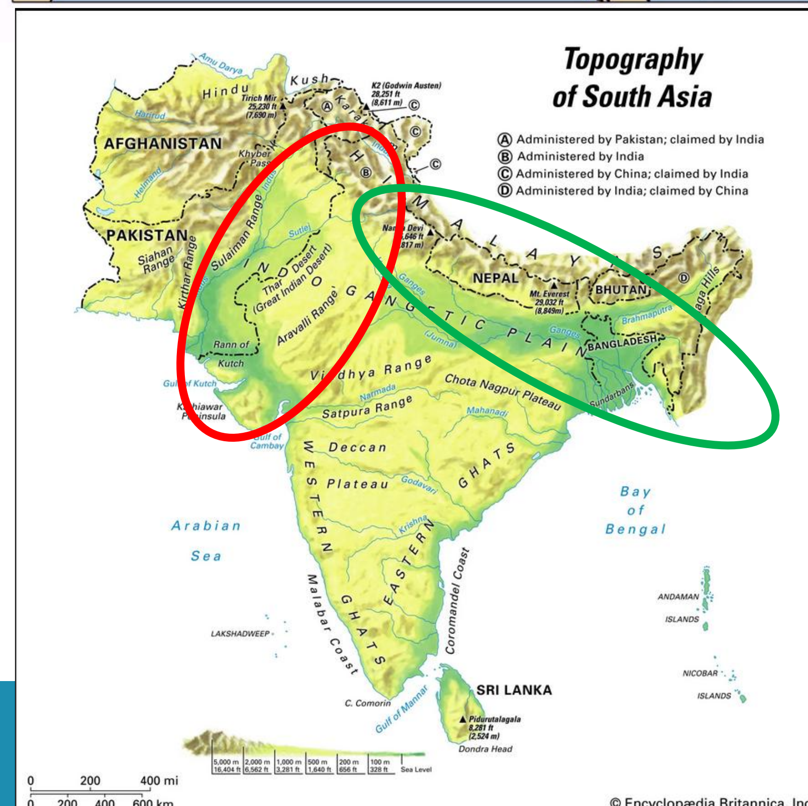
- een andere interpretatie van de beschrijving leidt tot een andere figuur
- Zie je waar het belangrijkste verschil zit?



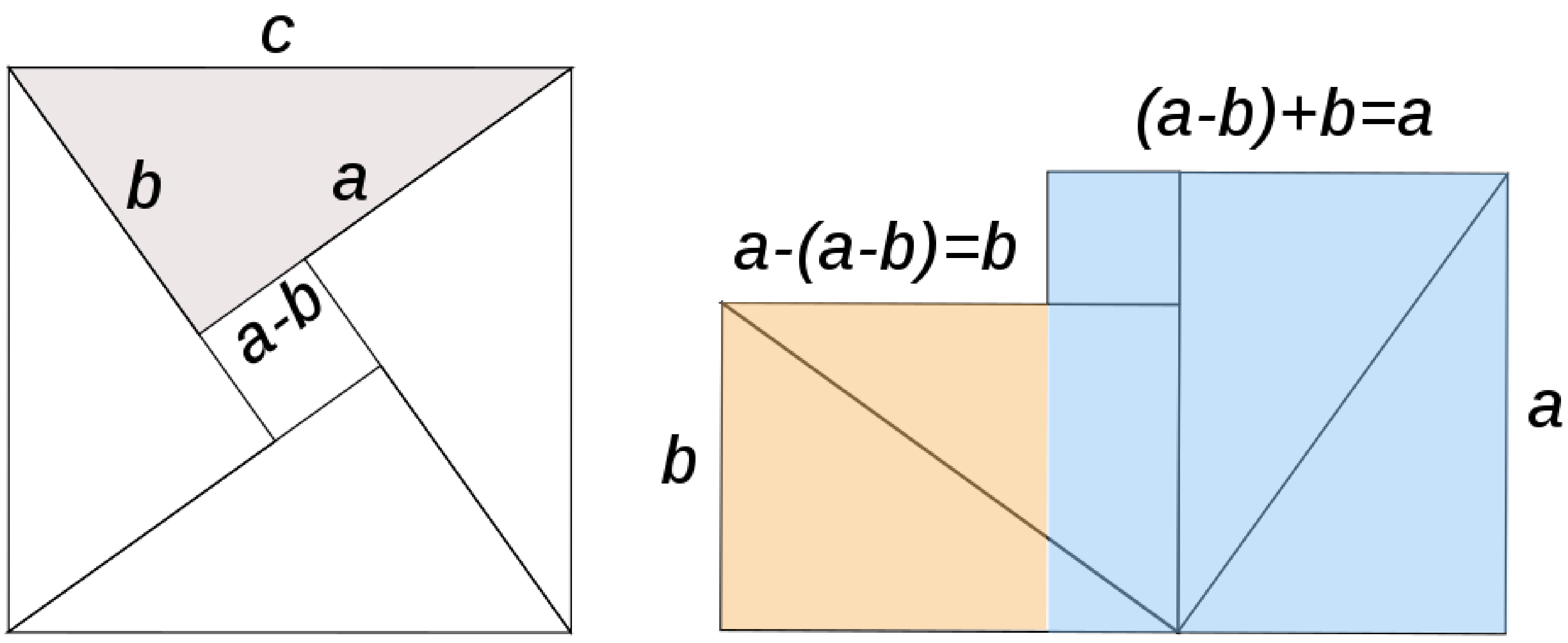
Context

- vanaf 600 v.Chr. tot 1400 n.Chr.
- contact met Griekse cultuur (Alexander de Grote, 300 v.Chr.)
- contact met Islamitisch-Arabische Rijk (vanaf 8ste eeuw)
- contact met China erg beperkt, maar toch ook niet volledig afwezig
- rijke geschiedenis op het vlak van wiskunde
    goniometrie, oneindige rijen en reeksen, …





Een bewijs uit India (Bhaskara II, 12de eeuw, in moderne notatie)

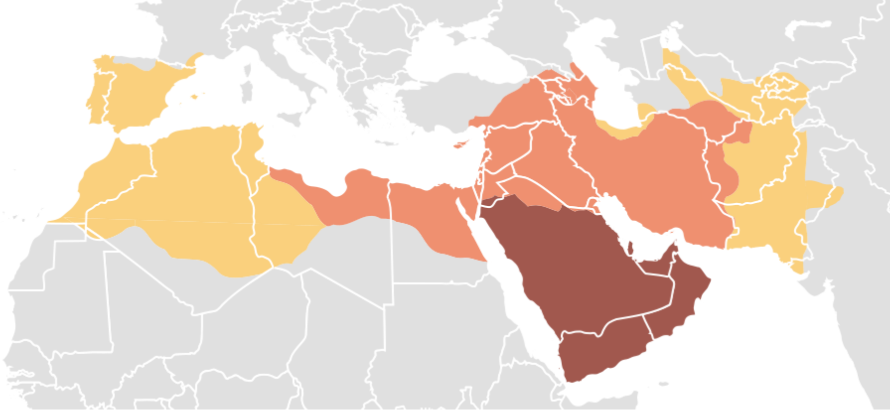


Terugblik

- Wat wij de stelling van Pythagoras noemen, was bekend in tal van culturen.
- Het toont dat heel veel culturen bijgedragen hebben aan de wiskunde en dat wiskunde niet louter een West-Europees product is.

Een meetkundig voorbeeld uit de Islamitisch-Arabische cultuur

Context



- 622 AD: Mohammed wordt naast religieuze ook militaire leider, expansie tot 750 AD
- Islamitische rijk omvat of grenst aan alle oude culturen en aan Oost-Romeinse Rijk
- bloeiperiode: 750 – 1258, Abbasidische kalifaat, Bagdad als culturele centrum: Huis van de Wijsheid (bibliotheek, observatorium)
- praktische maar ook theoretische wiskunde: verzamelen, vertalen, bestuderen van bronnen uit Griekenland, India, Perzië, …
- 1258: invasie Mongolen, Huis van de Wijsheid vernield, boeken in de rivier
- Islamitisch of Arabisch?
- rol van Arabische / Islamitische wiskunde lange tijd gereduceerd tot doorgeefluik, maar visie is sinds de jaren 1950 veranderd

Abu al-Wafa al-Buzjani

- bron: Beggren, J.L. (2009). Mathematics in Medieval Islam
  in: Katz, V. (zie eerder)
- 940-997
- uit Buzhgan in Khorasan in huidige Iran
- werkte in Bagdad
- brug tussen de theoretische en de praktische meetkunde
- On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

  Een aantal meetkundigen en ambachtslieden hebben zich vergist in de kwestie van deze vierkanten en hun samenstelling. De meetkundigen [hebben zich vergist] omdat ze weinig ervaring hebben met het construeren ervan, en de ambachtslieden [hebben zich vergist] omdat ze geen kennis hebben van bewijzen. […]

  …

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

…

Ik was aanwezig bij een aantal bijeenkomsten waaraan een groep meetkundigen en ambachtslieden deelnam. Hen werd gevraagd naar de constructie van een vierkant uit drie vierkanten. Een meetkundige construeerde gemakkelijk een lijn waarvan het kwadraat gelijk is aan de drie vierkanten(1), maar geen van de ambachtslieden was tevreden met wat hij had gedaan. De ambachtsman wil die vierkanten verdelen in stukken waaruit één vierkant kan worden samengesteld. […]

(1) Welke constructie maakte de ‘meetkundige’?

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

…

De ambachtslieden stelden een aantal methoden voor, waarvan sommige bewezen kunnen worden en andere onjuist zijn. De methoden die niet bewezen kunnen worden, lijken echter waar te zijn, waardoor iemand die ernaar kijkt, zou kunnen denken dat ze juist zijn. We zullen deze methoden presenteren, zodat de juiste van de onjuiste onderscheiden kunnen worden en iemand die zich in dit onderwerp verdiept, hopelijk geen fout maakt door een onjuiste methode te accepteren.

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Een van de ambachtslieden plaatste een van de vierkanten in het midden, deelde het tweede vierkant diagonaal doormidden en plaatste het daar. […] Hij trok vanuit het middelpunt van het derde vierkant twee rechte lijnen naar twee van de hoeken, niet op één diagonaal, en hij trok een lijn vanuit het middelpunt naar het middelpunt van de zijde tegenover de driehoek […]. Zo wordt het vierkant verdeeld in twee trapeziums en een driehoek. Vervolgens plaatste hij […]

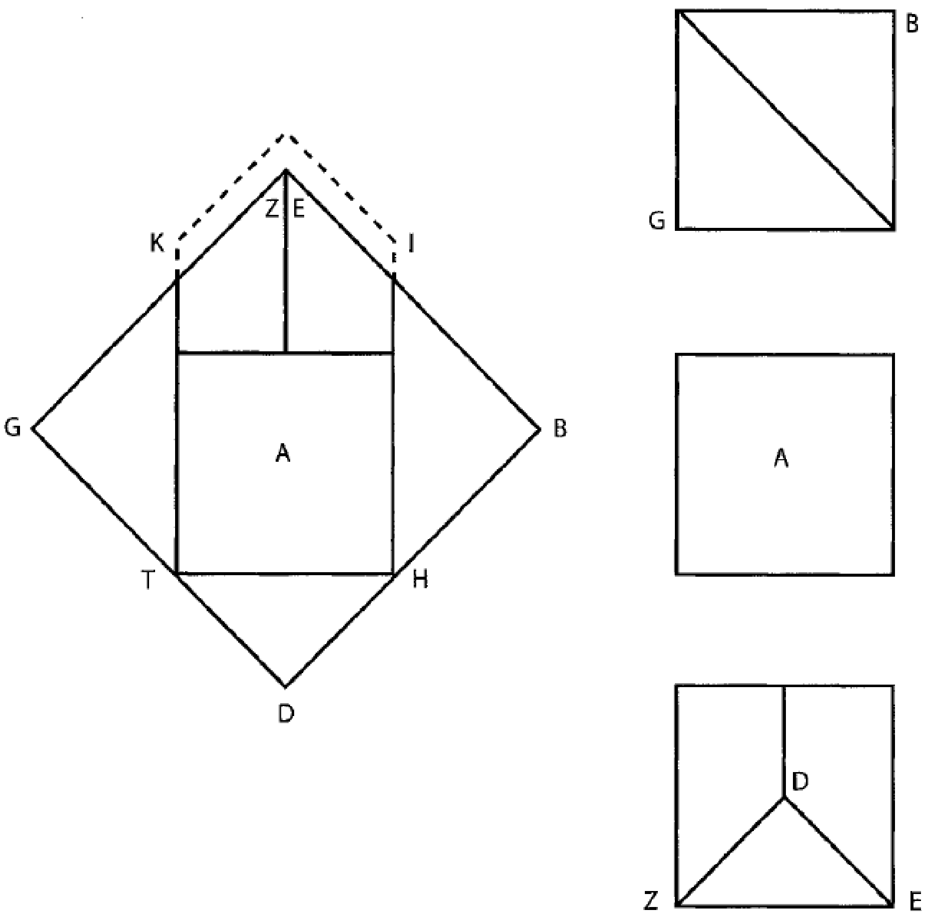


FIGURE 5.58

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Abu al-Wafa’ zei: Maar deze figuur die hij construeerde is ingebeeld, en iemand die geen ervaring heeft met de kunst of de meetkunde […] zou zich kunnen voorstellen dat deze correct is vanwege de correctheid van de hoeken en de gelijkheid van de zijden. […] Elk van de hoeken van de [drie] driehoeken, namelijk G, B en D, die [ook] hoeken van het vierkant zijn, is een rechte hoek; en de vierde hoek is samengesteld uit twee hoeken die elk een halve rechte hoek zijn […] De zijden zijn recht en gelijk, aangezien elk van deze zijden is samengesteld uit een zijde van een van de vierkanten plus de helft van de diagonaal, die gelijk zijn. Het is ook duidelijk dat ze rechte [lijnen] vormen wanneer ze samengevoegd worden […]

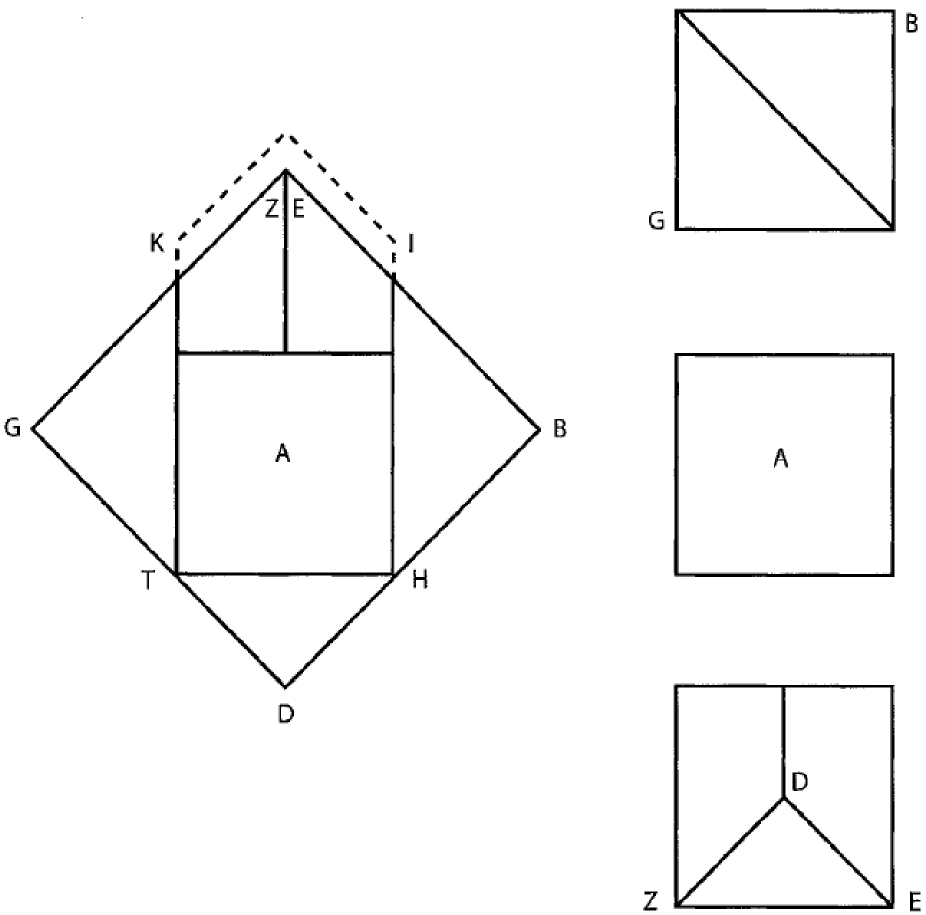


FIGURE 5.58

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Maar ze merken niet op waar de fout […] optreedt […] Als we de zijde van elk [eenheids]vierkant ongeveer tien el maken […] is de zijde van het [grote] vierkant bij benadering zeventien en een derde el(2). Maar de zijde van dit vierkant […] is zeventien en een veertiende(3) el […].

(2) en (3) Leg uit!

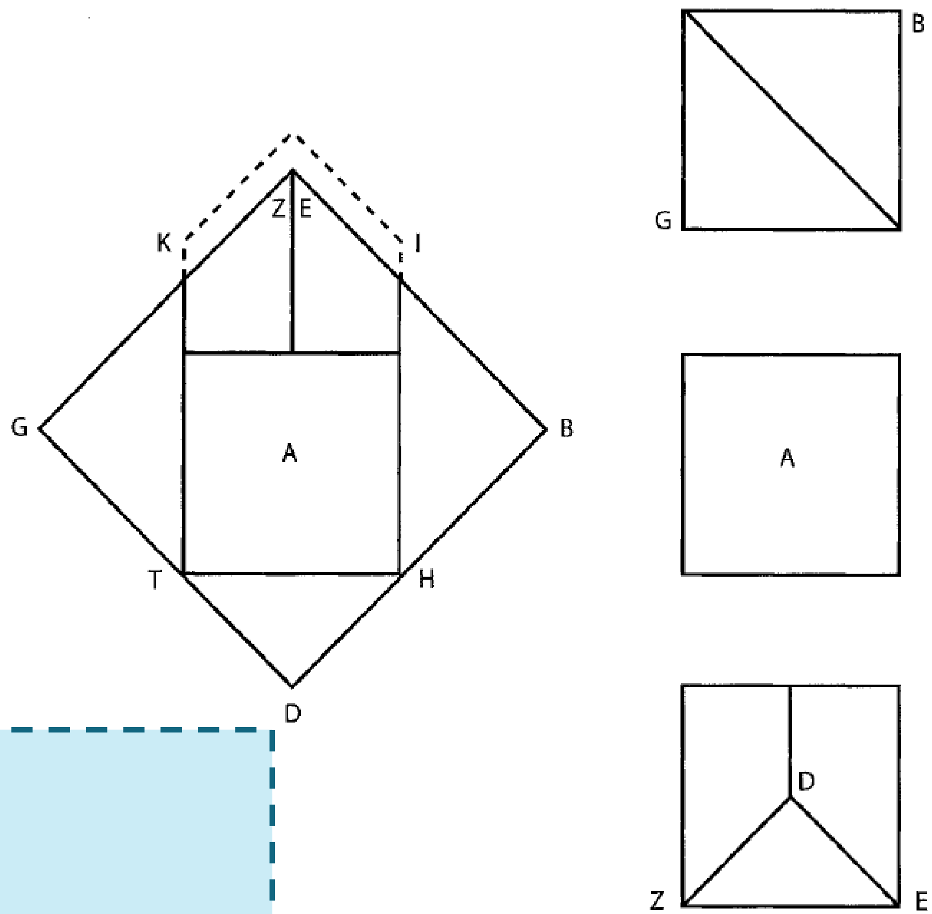


FIGURE 5.58

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Nogmaals, […] twee lijnen, HI en TK […] de diagonaal van vierkant BG is bij benadering veertien en een zevende[4], en zijde HI is vijftien[5].

(4) en (5) Leg uit!

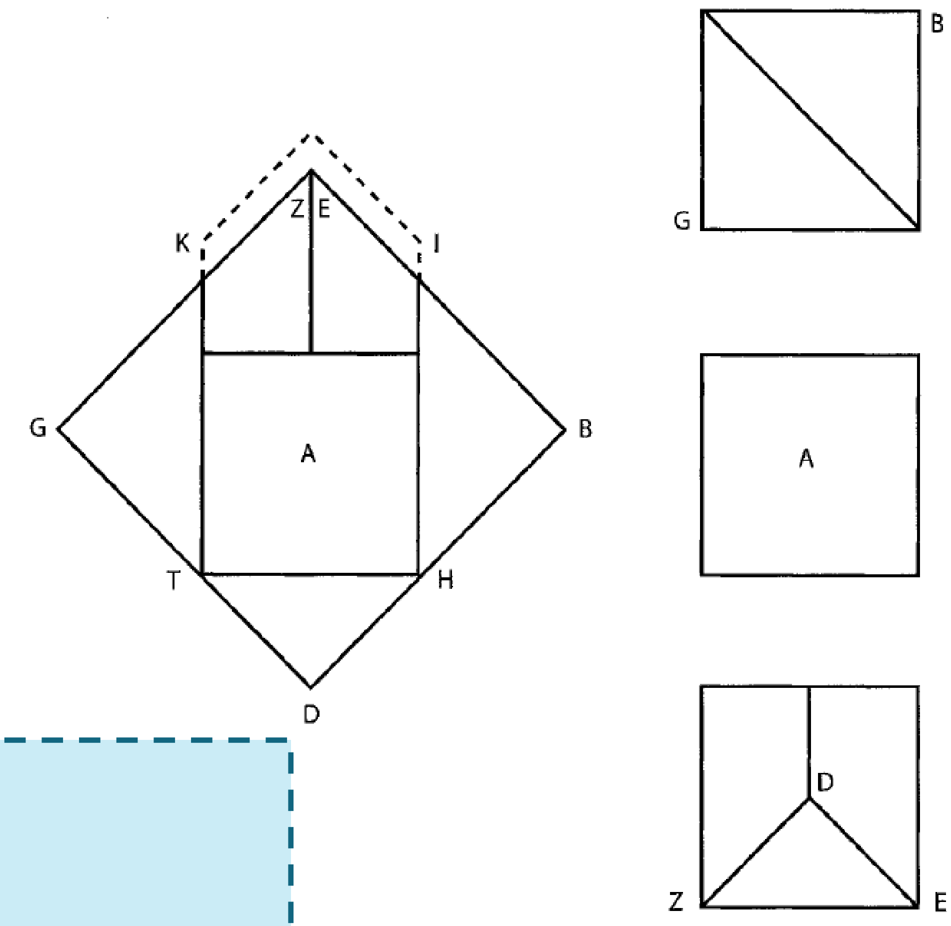


FIGURE 5.58

KU LEUVEN

Terugblik

- gebruik van originele teksten geeft het integreren van geschiedenis in een wiskundeles extra kleur
- in dit voorbeeld zie je hoe twee verschillende manieren om aan wiskunde te doen met elkaar in contact komen

Bedankt voor je aandacht!
Vragen welkom!