

Geschiedenis van de wiskunde inzetten in wiskundelessen eerste en tweede graad

Johan Deprez, Focus op wiskunde, Vorselaar, 28/1/26
slides komen online op mijn website (zie KU Leuven, wie-is-wie)

Kennismaking

- 30 jaar docent wiskunde (basiswiskunde in economische en biomedische opleidingen)
- 30 jaar docent vakdidactiek wiskunde (UAntwerpen, KU Leuven)
- sinds 1/10/26 emeritus 'met opdracht'
- geen specialist in de geschiedenis van de wiskunde, pas (relatief) recent betrokken bij geschiedenis van de wiskunde

vanaf 2de semester geef ik voor de vijfde keer Geschiedenis van de wiskunde, keuzevak in de master wiskunde en in de educatieve master

Vóór we van start gaan...

- er valt veel meer te vertellen over geschiedenis van de wiskunde dan wat er past in een sessie van 1:30...
- daarom: enkele goede bronnen waar je (veel) meer kunt vinden
 - boek Wortels van de wiskunde. Een historisch overzicht voor leraren en anderen (zie <https://www.epsilon-uitgaven.nl/>) en een bijbehorende reeks artikelen in het tijdschrift Euclides (http://www.jeaninedaems.nl/wp-content/uploads/2014/08/Euclides_serie_Wortels-van-de-Wiskunde.pdf)
 - Negen fragmenten uit de geschiedenis van de wiskunde, Uitwiskeling 39/3 (en nog veel andere bijdragen in dit tijdschrift, <https://www.uitwiskeling.be/>)
 - een aantal Zebraboekjes (<https://www.epsilon-uitgaven.nl/>)
 - The story of math (reeks van vier documentaires door Marcus du Sautoy)
 - en nog veel andere bronnen...

Een heel oud voorbeeld, met een link naar België

Het Ishango-beentje



- (credits figuur: meestal via link in de figuur)
- 1950, tijdens opgraving geleid door Jean de Heinzelin nabij Ishango, Democratic Republic of Congo
- bewaard in het Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen
- gedateerd op ong. 20 000 v. Chr.
- niet het oudste, dat is het beentje van Lebombo, 35 000 BC, Swaziland/South-Africa

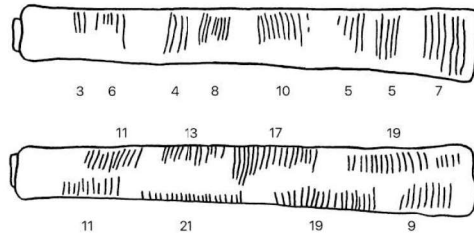


Fig. 1 A drawing of two sides of the Ishango bone showing the grouped notches

Figuur onderaan uit: Pejlar, J., Bråting, K. (2019). Writing the History of Mathematics: Interpretations of the Mathematics of the Past and Its Relation to the Mathematics of Today. In: Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences: 1-26.

Het Ishango-beentje

- getallenleer in de eerste graad: veelvouden, priemgetallen, talstelsel
- “door wiskunde uit allerlei tijden en culturen te laten zien, geef je een beeld van wiskunde als een levend vak, waar je dus ook zelf nog over na kunt denken” (Jeanine Daems, Waarom geschiedenis in de wiskundeles? Euclides 92/3)
- bewaard in het Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen → hier kun je vragen bij hebben...
- meer weten? bv. D. Huylebrouck, Africa and Mathematics, <https://dirkhuylebrouck.be/>

Het Ishango-beentje: interpretaties

- wellicht niet: gewoon tellen

- rij 1



- rij 3



- rij 2 (en laatste groepje van rij 1)

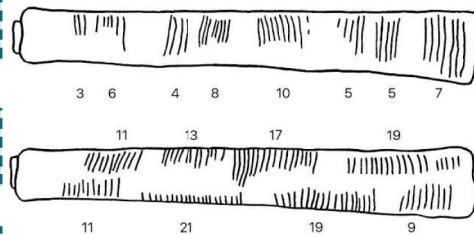


Fig. 1 A drawing of two sides of the Ishango bone showing the grouped notches

Figuur onderaan uit: Pejlar, J., Bråting, K. (2019). Writing the History of Mathematics: Interpretations of the Mathematics of the Past and Its Relation to the Mathematics of Today. In: Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences: 1-26.

Getallen in vier grote oude beschavingen

Mesopotamië

Een 'oud' voorbeeld uit Mesopotamië

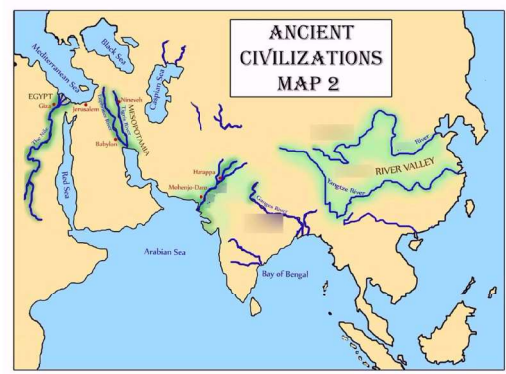
- bron: Robson, E. (2009). Mesopotamian Mathematics. in: Katz, V., The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook. Princeton and Oxford: Princeton University Press
- kleitablet W 19408.76
- Uruk, 3200 BC (Mesopotamië, niet Babylon!)
- tempel van Inana
- tablet hergebruikt in heropbouw van de tempel
- kleitablet bevat berekening van de oppervlakte van twee velden

tempel bezat veel gronden voor landbouw en veeteelt



Context: de vier grote oude beschavingen

- ontstaan van irrigatie-economieën langs de oevers van grote rivieren
- Mesopotamië: Tigris en Eufraat
- Egypte: Nijl
- China: Hoang-ho (Gele Rivier, noorden) en Yang-tse (Lange Rivier, zuiden)
- India: Indus (westen) en Ganges (oosten)
- wat?



grotere bevolkingsconcentraties: steden / handel, complexere bestuursvormen / ontstaan van een hogere klasse / vaak verweven met godsdienst / nood aan organisatie en administratie / ontstaan van schrift en wiskunde / schrijven en rekenen door een beperkte groep

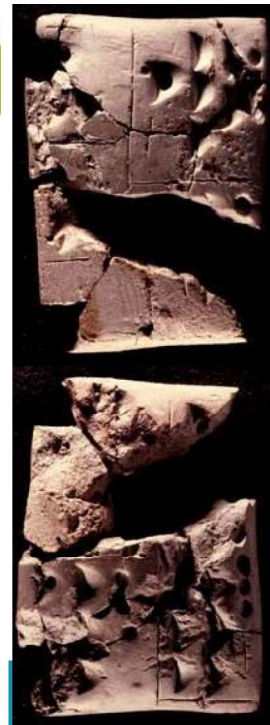
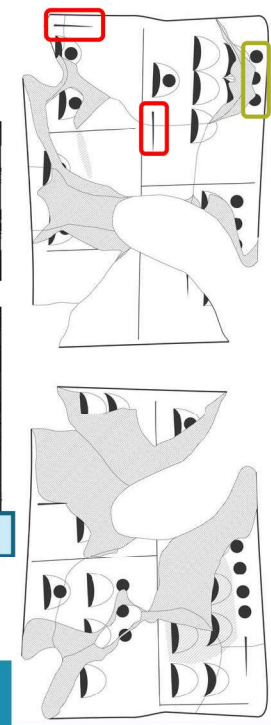
veld 1 – twee 'breedtes' en twee 'lengtes'

Obverse	600 600 600	600 60 60 60 60 10 60
Reverse	600 60 60 60 60 — 60 10 10 60	600 60 600 10 10 600 60 10 10 60 60 10 10 — 60 60 60

hier nog geen positietalstelsel!

1 rod

Length units: ≈ 3.6 km ≈ 360 m ≈ 60 m ≈ 6 m



Een 'oud' voorbeeld

—	600 60 60 10 10
600	60 60 10
600	60
600	600 60 60 10 10
600 —	60 60 10

$$\begin{aligned} & \{(2 \times 600) + (2 \times 600)\} / 2 \times \\ & \{(600 + 5 \times 60 + 3 \times 10) + (600 + 4 \times 60 + 3 \times 10)\} / 2 \\ & = (1200 + 1200) / 2 \times (930 + 870) / 2 \\ & = 1200 \times 900 \text{ (rods)} = 1,080,000 \text{ (area sar)} \\ & = 600 \text{ (area bur)} \end{aligned}$$

- berekening van de oppervlakte
- via (benaderende?) formule ('agrimensor's method')

$$A = (l_1 + l_2)(b_1 + b_2)/4$$
- praktische wiskunde!
- maar toch wat kunstmatig (bv. ronde uitkomst): gebruikt voor scholing
- anders dan de meeste kleitabletten (registratie transacties, bezittingen, ...)

13

KU LEUVEN

Terugblik

- dragers zijn kleitabletten: zijn (relatief) goed bewaard gebleven, dus (relatief) veel bronnenmateriaal
- kleitabletten bevatten (o.a.) voorbeeldproblemen met hun oplossingsmethode
 - bedoeld om een algemene oplossingsmethode te tonen
 - ook al wordt ze niet in het algemeen geformuleerd
 - geen verklaring waarom de oplossingsmethode werkt (maar wellicht was zo'n verklaring wel bekend)
- het 'echte' werk (allerhande administratie) maar ook voor scholing
- dat er in de geschiedenis voor eenvoudige zaken als oppervlakte van een vierhoek aanvankelijk 'verkeerde' formules gebruikt werden, kan helpen om in te zien dat de huidige kennis niet in één-twee-drie ontstaan is

14

KU LEUVEN

Voorbeelden uit de Oud-Babylonische periode

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
30	40	50	60

- vanaf ong. 2000 v. Chr.
- 1-60 via symbolen voor 1 en 10
- verder: 60-delig positietalstelsel

Cuneiform	Transliteration	Decimal value
	1, 15	75

Voorbeelden uit de Oud-Babylonische periode

SUM OF A GEOMETRIC PROGRESSION COMPUTED FROM THE BOTTOM UP. THE FIRST TERM IS 2, THE SECOND TERM IS $2 \times (1 + 1/6) = 2 \frac{1}{3}$, WRITTEN AS 2;20. THE SUM IS GIVEN IN LINE 1, IN SEXAGESIMAL PLACE VALUE NOTATION; SCHOOL TEXT REPRESENTING THE NUMERICAL SOLUTION ALGORITHM FOR AN INHERITANCE PROBLEM FOR 7 BROTHERS



MS 1644
Powers of 70 multiplied by 2. Sumet, ca. 200 BC

- tekst website (klik op figuur)
 - schooltekst, erfenis 7 broers
 - factor 7/6 i.p.v. 70
 - steeds 1/6-de meer
 - of: van boven naar onder steeds 1/7-de minder
- geen symbool voor 0
- ook 'kommagetallen'

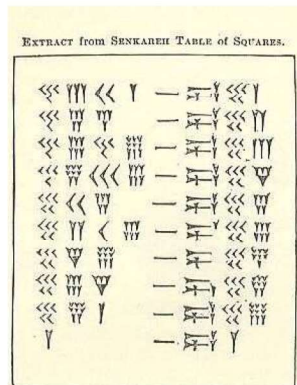
"Powers of 70 multiplied by 2"
(van onder naar boven, lijn 8
t.e.m. lijn 2, lijn 1: partieelsom)

16

KU LEUVEN

Voorbeelden uit de Oud-Babylonische periode

- illustratie uit The seven great monarchies van George Rawlinson uit 1880
- in de vorm: ... is kwadraat van ...
- welke kwadraten in dit fragment?



- om producten te berekenen
- beter dan tabel producten?

Gevraagd: 18×23
 Oplossing: $18 + 23 = 41$
 $41 \times 41 = 28:01$
 $18 \times 18 = 5:24$
 $23 \times 23 = 8:49$
 $5:24 + 8:49 = 14:13$
 $28:01 - 14:13 = 13:48$
 de helft van $13:48 = 6:54$
 dit is de uitkomst van 18×23

17

Egypte

19

Terugblik

- het geheel van deze voorbeelden toont hoe wiskunde geëvolueerd is doorheen de tijd in Mesopotamië
- het zestigdelige positietalstelsel kwam er niet van vandaag op morgen
- het talstelsel uit Mesopotamië was niet perfect: zie het ontbreken van de 0
- wij werken ondertussen met een decimaal positietalstelsel...
- ... behalve bij het meten van hoeken en van de tijd → het zestigdelige talstelsel is dus niet helemaal uit onze cultuur verdwenen

18

Egypte: geen positietalstelsel

Plaatstèle van prinses Nefertie uit het Oude Rijk, afkomstig uit haar graf in Gizeh (2590–2565 BC)

schilderwerk op kalksteen

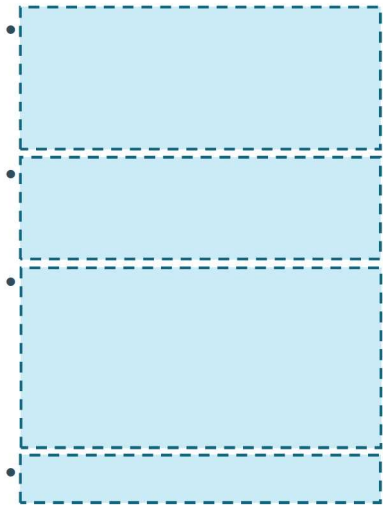
nu in het Louvre



	∩	∩	∩	∩	∩	∩
1	10	100	1000	10,000	100,000	1,000,000

20

Problem texts: voorbeeld 1



Rhind Mathematical Papyrus, Problem 26

A quantity, its $\bar{4}$ (is added) to it so that 15 results

Calculate with 4.

You shall calculate its $\bar{4}$ as 1. Total 5.

Divide 15 by 5.

\backslash 5
 \backslash 2 10 delen via vermenigvuldigen

3 shall result.

Multiply 3 times 4.

. 3
2 6 vermenigvuldigen via
opeenvolgende
verdubbelingen
 \backslash 4 12

12 shall result.

. 12
 $\bar{4}$ 3 Total 15.

The quantity 12

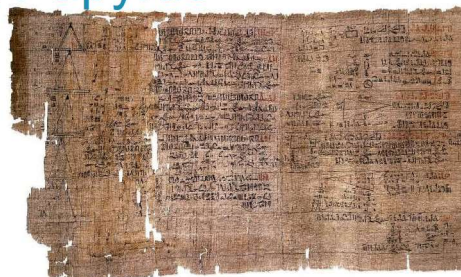
its $\bar{4}$ 3, total 15.

21

KU LEUVEN

Rhind Mathematical Papyrus

- rond 1650 BC
- 1858: aankoop door Henry Rhind in Luxor
- sinds 1920 in British Museum
- geschreven door Ahmes
- zou gebaseerd zijn op ouder prototype uit Middle Kingdom (2000-1800 v.Chr.)
- papyrus is veel kwetsbaarder dan kleitabletten → veel minder bronnenmateriaal over wiskunde in Egypte
- probleem 26: toont hoe 'moderne' methoden (voor vermenigvuldigen en delen, voor het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen) zich pas stap voor stap ontwikkelden



22

KU LEUVEN

Intermezzo: getallen bij de Oude Grieken

23

KU LEUVEN

Context



- andere context dan Mesopotamië en Egypte
- relatief kleine stadstaten en handelskolonies langs de kusten
- recenter: 8ste eeuw voor Christus tot 5de eeuw na Christus

24

KU LEUVEN

Ook hier praktische wiskunde...

- voor administratie, handel, ...
- vaas van Darius, Taranto, 340 à 320 BC
- meerdere scènes
- o.a. met belastingontvanger
- Attische notatie voor getallen
 - verticale streepjes voor 1 t.e.m. 4
 - hoofdletter Π (van 'penta') of Γ voor 5
 - machten van 10
 - Δ = 10 (deka), H = 100 (hekaton),
 - X = 1000 (khiloi, ?), M = 10 000 (myrioi)
- acrofonisch: de symbolen verwijzen naar de eerste letter van het (tel)woord
- steentjes geven de aantallen aan



25

Ook hier praktische wiskunde...

- Attische notatie voor getallen
 - verticale streepjes voor 1 t.e.m. 4
 - Π (van 'penta') of Γ voor 5
 - machten van 10
 - Δ = 10 (deka), H = 100 (hekaton),
 - X = 1000 (khiloi, ?), M = 10 000 (myrioi)
- acrofonisch: de symbolen verwijzen naar de eerste letter van het (tel)woord
- steentjes geven de aantallen aan
- probeer het bedrag te lezen
- in de stijl van Egypte en (later) Rome



26

KU LEUVEN

Maar natuurlijk ook een heel andere, theoretisch georiënteerde wiskunde

- beter bekend onder wiskundigen
- verhoudingen van gehele getallen ('rationale getallen') spelen een belangrijke rol bij Pythagoras ('alles is getal', muziek)
- ontdekking van de 'irrationale getallen' zorgde voor een grondslagencrisis
 - zie hiervoor het artikel uit Uitwiskeling
 - volledig rigoureuze behandeling pas aan het einde van de 19de eeuw

27

KU LEUVEN

Getallen in vier grote oude beschavingen (deel 2)

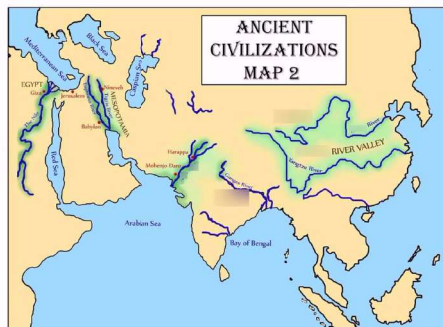
28

KU LEUVEN

China

Context

- start rond 2000 v.Chr. rond de Gele Rivier in het noorden, maar geen geschreven bronnen
- vanaf 400 v.Chr. tot 1600 n.Chr.
- geschriften op bamboebladeren, zijde, papier
- centrale rol voor staatsexamens om ambtenaar te kunnen worden
- tien klassieke geschriften als voorbereiding op de examens
 - bekendste werk: Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde
- rijke geschiedenis op het vlak van wiskunde
 - naast wat we hier bespreken: oplossen van stelsels van eerstegraadvergelijkingen met de methode van Gauss-Jordan, driehoek van Pascal
- ... maar eerder behoudsgezind: weinig evolutie in de tijd



Talstelsel en rekenstaafjes

- schrijfwijze voor getallen
 - voorbeeld

三	百	八	十	七
<i>san</i>	<i>bai</i>	<i>ba</i>	<i>shi</i>	<i>qi</i>
three	hundred	eight	ten	seven
 - decimaal
 - quasi een positietalstelsel, geen nul (en ook niet nodig!)
 - tot tienduizendtallen
 - daarna blokken vier 'cijfers'
- Chinezen rekenden ook met negatieve getallen ('winst' en 'verlies')

Talstelsel en rekenstaafjes

- getallen gevormd door staafjes in kolommen op een bord
- afwisselend verticaal en horizontaal
- lege plaats voor de nul
- bewerkingen uitvoeren
 - optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, vierkantswortel, derdemachtswortel

—	≡	≡≡	≡≡≡	≡≡≡≡	⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9
					⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fig. 1 Rod numbers.



Fig. 2 60390 as a rod number

Een rekenkundig probleem

- probleem 48 uit Suan shu shu (Book of Numbers and Computations, ong. 180 v.Chr.), in 1983 ontdekt in het graf van een ambtenaar, 20 bamboestrips, ong. 180 v.Chr.
- Gevederde pijlen

“The norm: one person in one day makes 30 arrows or 20 feathered arrows*. If one now wishes to have one person both make arrows and feather them, in 1 day how many can be made?”

* bedoeld wordt: veren bevestigen op de pijl

The answer: 12.

The method: combine the arrows and the feathering as divisor; taking the arrows and the feathering, mutually multiply them together as the dividend.”



uit Dauben, J. (2019). The evolution of mathematics in Ancient China. From the newly discovered Shu and Suan shu shu bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol 19, N° 37, 25-78

33

KU LEUVEN

Een rekenkundig probleem

“The norm: one person in one day makes 30 arrows or 20 feathered arrows. If one now wishes to have one person both make arrows and feather them, in 1 day how many can be made?”

The answer: 12.

The method: combine the arrows and the feathering as divisor; taking the arrows and the feathering, mutually multiply them together as the dividend.”

Verklaar!



34

KU LEUVEN

India

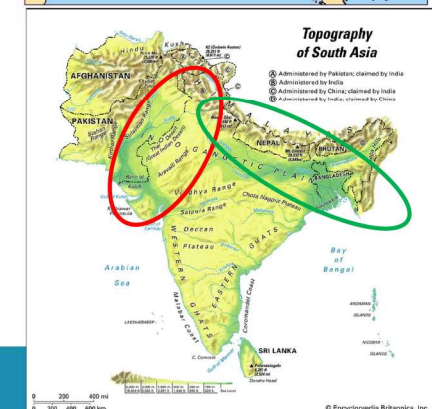
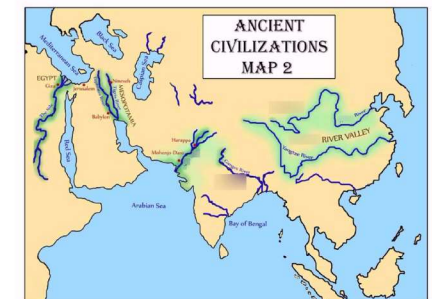
35

KU LEUVEN

Context

- vanaf 600 v.Chr. tot 1400 n.Chr.
- contact met Griekse cultuur (Alexander de Grote, 300 v.Chr.)
- contact met Islamitisch-Arabisch Rijk (vanaf 8ste eeuw)
- weinig contact met China, maar toch ook niet volledig afwezig
- rijke geschiedenis op het vlak van wiskunde

naast wat we hier bespreken: goniometrie, oneindige rijen en reeksen, ...



36

KU LEUVEN

0 als cijfer en als getal

- decimaal positietalstelsel stond rond 600 n.Chr. op punt
- invloed uit China?
 - niet zo duidelijk
 - Himalaya zorgt voor moeilijk verkeer tussen beide culturen
- ontdekking van de 0
 - als cijfer: lege plaats in het positietalstelsel invullen
 - vanaf de 9de eeuw: 0 als getal
 - afwezigheid van een hoeveelheid is een hoeveelheid op zich
 - Mahavira (ca 850): rekenen met 0, optellen/afrekken/vermenigvuldigen
 - Bhaskara II (12de eeuw): delen door 0 geeft oneindig

37

KU LEUVEN

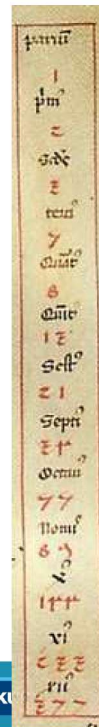
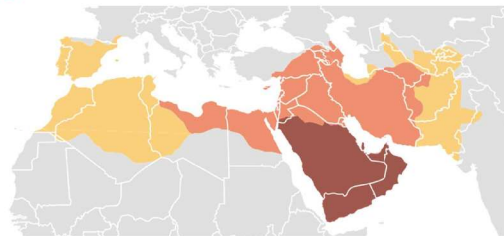
Er valt nog heel wat meer te vertellen...

- de moeizame aanvaarding van negatieve getallen
- de 'ontdekking' van complexe getallen
- het ontstaan van notaties voor bewerkingen
- geschiedenis van het getal π
- ...

39

KU LEUVEN

Het vervolg van het verhaal



- decimaal positietalstelsel verspreidt zich over 'de hele wereld'
- Arabisch-Islamitische cultuur neemt het over (o.a. Al Khwarizmi) → Hindoe-Arabische talstelsel
- in de late middeleeuwen komt het via Spanje en Italië naar West-Europa (o.a. via Fibonacci)
- lange strijd (abacisten versus algoristen) vooraleer het hier uiteindelijk geaccepteerd wordt (Simon Stevin, ca 1600): o.a. fraudegevoelig

38

KU

Meetkunde

40

KU LEUVEN

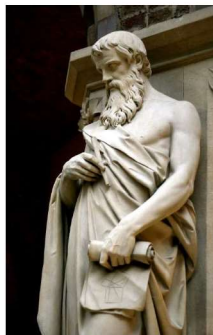
Meetkunde bij de Oude Grieken: De Elementen van Euclides

41

KU LEUVEN

De Elementen van Euclides

- Context
 - 323 BC: dood van Alexander de Grote, rijk valt uiteen
 - na ong. 300 BC heerst Ptolemeïsche dynastie over Egypte
 - stad Alexandrië in Egypte wordt centrum van de wiskunde
 - vermenging van Griekse en Oosterse tradities
- Euclides, ong. 300 v.Chr.
- ook eerdere auteurs schreven Elementen, maar niet bewaard gebleven
- niet de verzameling van alle tot dan toe gekende wiskunde, wel een inleidend handboek met alle elementaire wiskunde
- steunde in op voorgangers: Pythagoreërs, Hippocrates, Eudoxos, Theaetetus, ..., maar bevat ook nieuwe kennis
- in de traditie van Plato en Aristoteles
- systematische opbouw van de behandelde kennis

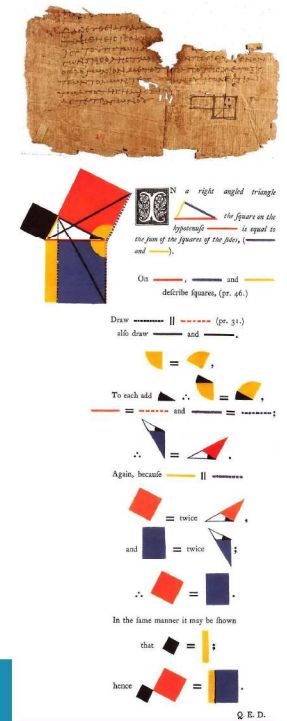


42

KU LEUVEN

Hoe kennen we de Griekse wiskunde?

- aanvankelijk op papyrus
- veel werken zijn helemaal verloren gegaan
- De Elementen van Euclides zijn via kopieën, kopieën van kopieën, ... blijven bestaan
- klein stukje kopie via papyrus Oxyrhynchus uit ong. 100 AD, ontdekt rond 1900
- bij het kopiëren werden fouten gemaakt / aanvullingen gemaakt / vereenvoudigingen doorgevoerd / 'verbeteringen' aangebracht / ...
- een heel aparte editie: Byrne, 1847



43

De start

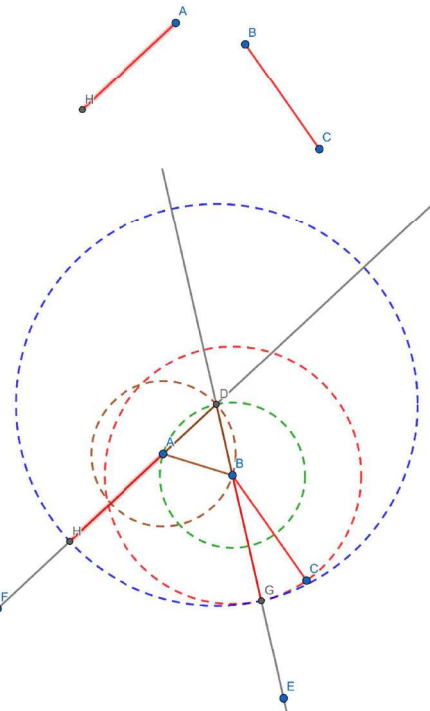
- 23 definities
 - bv. "Een rechte is lengte zonder breedte" ...
- 5 postulaten
 - bv. "Het is mogelijk een rechte lijn te trekken van een punt tot een ander punt." ...
- 5 axioma's
 - bv. "Dingen die gelijk zijn aan een derde, zijn ook onderling gelijk." ...
- geen definities in de huidige betekenis; in feite basisbegrippen die juist ongedefinieerd blijven (net zoals je axioma's kunt zien als onbewezen eigenschappen)
- axioma's in de huidige betekenis komen eerder overeen met de postulaten van Euclides i.p.v. met zijn axioma's

44

KU LEUVEN

Derde postulaat

- “Het is mogelijk een cirkel te construeren met een gegeven middelpunt en een gegeven straal.”
 - ruime interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal BC
 - strikte interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal AH
- Propositie 2 uit boek 1: ‘strikt’ impliceert ‘ruim’



45

Terugblik

- kennismaken met de nieuwe manier waarop de Oude Grieken aan wiskunde deden, bijvoorbeeld door hen iets te laten zien uit De Elementen van Euclides, kan ook voor leerlingen een kennismaking zijn met een nieuwe manier om aan wiskunde te doen en kan hen laten nadenken over wat wiskunde is

46

Boek 1: stelling van Pythagoras

- Propositie 47 = (rechtstreekse) stelling van Pythagoras
- opp. AFGC

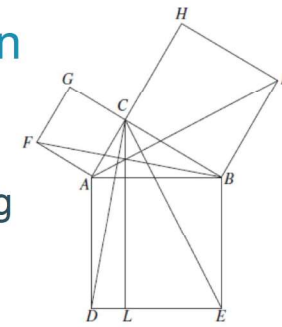


FIG. 5.4



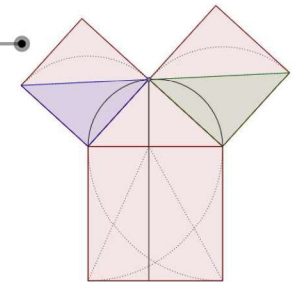
= 2 maal opp. AFB

= 2 maal opp. ACD

= opp. rechthoek ADL

• ...

Schritt 1
Schritt 2
Schritt 3
Schritt 4



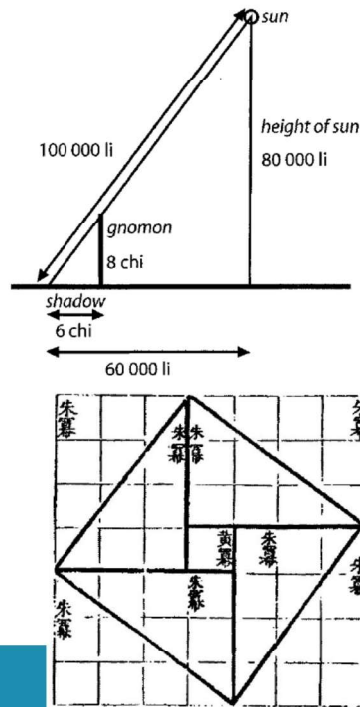
47

China en India over de stelling van Pythagoras

48

Gou-gu

- Zhou bi suan jing (The Mathematical Classic of the Zhou Gnomon, 1ste eeuw v.Chr.) en latere commentaren, aanvullingen en interpretaties
- Chinezen gebruikten het concept driehoek niet
- in plaats daarvan
 - gu = hoogte
 - gou = schaduw = basis
 - xian = snaar
- ook het Griekse woord hypotenusa voor schuine zijde betekent 'snaar'!
- gou-gu-relatie = stelling van Pythagoras

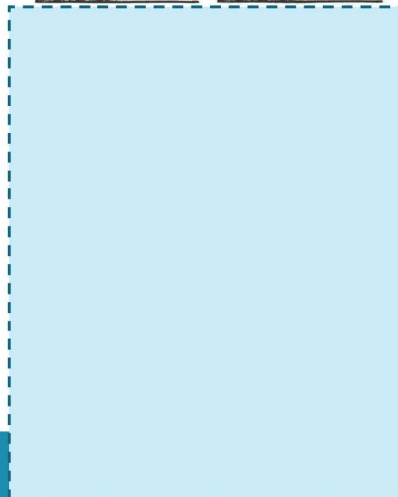
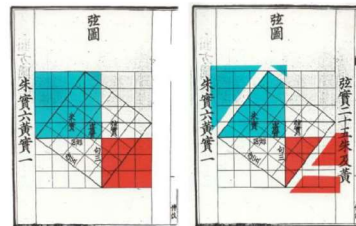


Gou-gu-relatie en het out-in-principe

- Chinese wiskundigen toonden wel interesse voor het verantwoorden van hun methoden, maar anders dan de Grieken
 - geen axiomatisch opgebouwde theorie
 - wel via voorbeelden, figuren, verantwoorden waarom een methode werkt, soms enkel voor een bepaalde categorie, ...
- 'bewijs' voor de 3-4-5-driehoek alleen zou natuurlijk een beetje flauw zijn
 - klopt dit puzzelbewijs ook voor een algemene driehoek met rechthoekszijden $a \geq b$ en schuine zijde c ?
 - zie volgende slides!

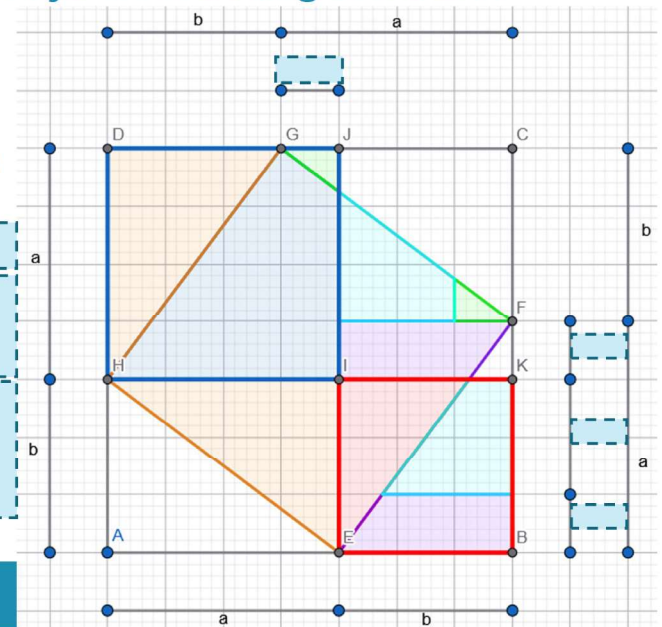
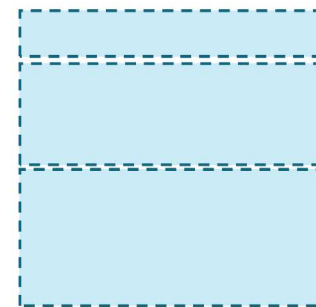
Bewijs van gou-gu-relatie via out-in-principe

- verplaats de delen van de kleine vierkanten die buiten het grote vierkant liggen naar binnen het grote vierkant
- ... op de volgende manier
- op basis van een mogelijke interpretatie van de tekst bij de figuur in een later werk (Jiu zhang suan shu, Nine Chapters on Mathematical Procedures, 3de eeuw n.Chr. op basis van werk uit de 1ste eeuw v.Chr.) die verloren gegaan is



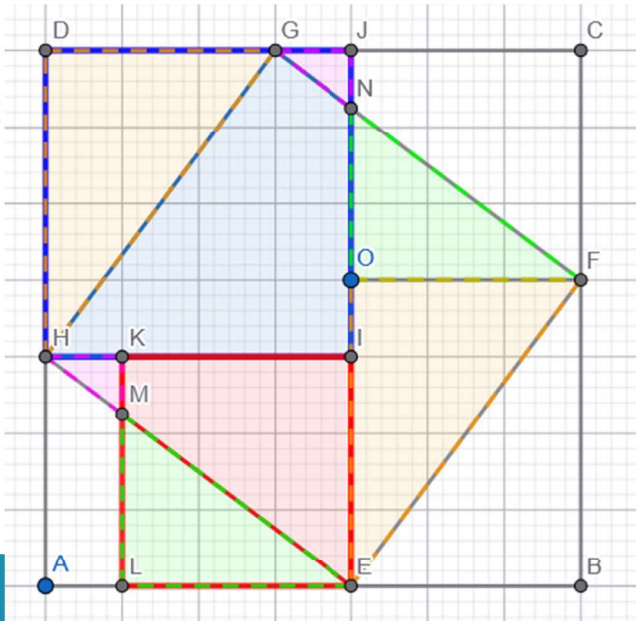
Klopt het bewijs in het algemeen?

- d.w.z. voor rechthoekige driehoeken met rechte zijden $a \geq b$ en schuine zijde c ?



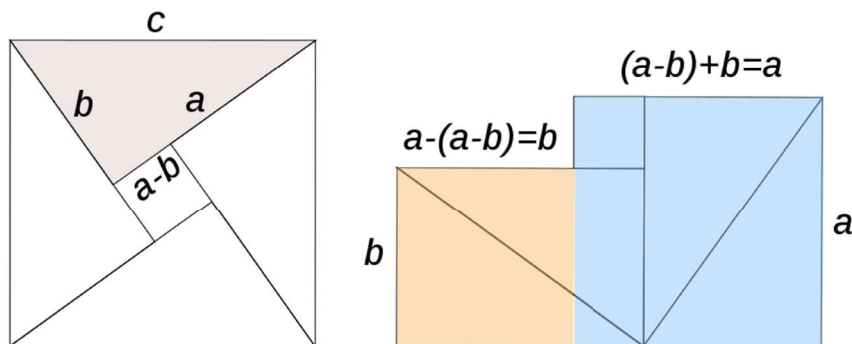
Nog een puzzelbewijs

- een andere interpretatie van de beschrijving leidt tot een andere figuur
- Zie je waar het belangrijkste verschil zit?



53

Een bewijs uit India (Bhaskara II, 12de eeuw)



54

KU LEUVEN

Terugblik

- Wat wij de stelling van Pythagoras noemen, was bekend in tal van culturen.
- Het toont dat heel veel culturen bijgedragen hebben aan de wiskunde en dat wiskunde niet louter een Europees product is.

55

KU LEUVEN

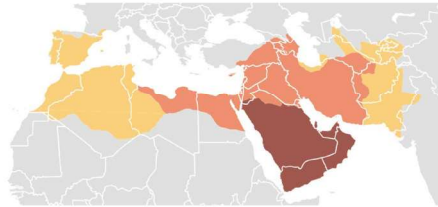
Een meetkundig voorbeeld uit de Islamitisch-Arabische cultuur

56

KU LEUVEN

Context

- 622 AD: Mohammed wordt naast religieuze ook militaire leider
- Islamitische rijk omvat of grenst aan alle oude culturen en aan Oost-Romeinse Rijk
- bloeiperiode: 750 – 1258, Abbasidische kalifaat, Bagdad als culturele centrum: Huis van de Wijsheid (bibliotheek, observatorium)
- praktische maar ook theoretische wiskunde: verzamelen, vertalen, bestuderen van bronnen uit Griekenland, India, Perzië, ...
- 1258: invasie Mongolen, Huis van de Wijsheid vernield, boeken in de rivier
- Islamitisch of Arabisch?
- rol van Arabische / Islamitische wiskunde lange tijd gereduceerd tot doorgeefluik, maar visie is sinds de jaren 1950 veranderd



57

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani

- 940-997
- uit Buzhgan in Khorasan in huidige Iran
- werkte in Bagdad
- wordt omschreven als Perzische wiskundige
- *On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan*: brug tussen de theoretische en de praktische meetkunde (uit Katz, p. 61 e.v.)



Een aantal meetkundigen en ambachtslieden hebben zich vergist in de kwestie van deze vierkanten en hun samenstelling. De meetkundigen [hebben zich vergist] omdat ze weinig ervaring hebben met het construeren ervan, en de ambachtslieden [hebben zich vergist] omdat ze geen kennis hebben van bewijzen. [...]

...

58

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

...

Ik was aanwezig bij een aantal bijeenkomsten waaraan een groep meetkundigen en ambachtslieden deelnam. Hen werd gevraagd naar de constructie van een vierkant uit drie vierkanten. Een meetkundige construeerde gemakkelijk een lijn waarvan het kwadraat gelijk is aan de drie vierkanten⁽¹⁾, maar geen van de ambachtslieden was tevreden met wat hij had gedaan. De ambachtsman wil die vierkanten verdelen in stukken waaruit één vierkant kan worden samengesteld. [...]

(1) Welke constructie maakten de 'geometers'?



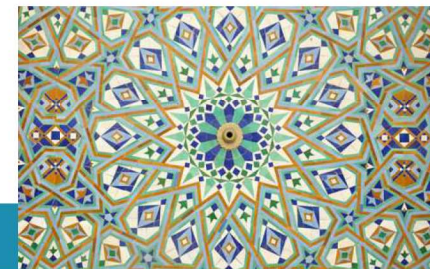
59

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

...

De ambachtslieden stelden een aantal methoden voor, waarvan sommige bewezen kunnen worden en andere onjuist zijn. De methoden die niet bewezen kunnen worden, lijken echter waar te zijn, waardoor iemand die ernaar kijkt, zou kunnen denken dat ze juist zijn. We zullen deze methoden presenteren, zodat de juiste van de onjuiste onderscheiden kunnen worden en iemand die zich in dit onderwerp verdiept, hopelijk geen fout maakt door een onjuiste methode te accepteren.



60

KU LEUVEN

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Een van de ambachtslieden plaatste een van de vierkanten in het midden, deelde het tweede vierkant diagonaal doormidden en plaatste het daar. [...] Hij trok vanuit het middelpunt van het derde vierkant twee rechte lijnen naar twee van de hoeken, niet op één diagonaal, en hij trok een lijn vanuit het middelpunt naar het middelpunt van de zijde tegenover de driehoek [...]. Zo wordt het vierkant verdeeld in twee trapeziums en een driehoek. Vervolgens plaatste hij [...]

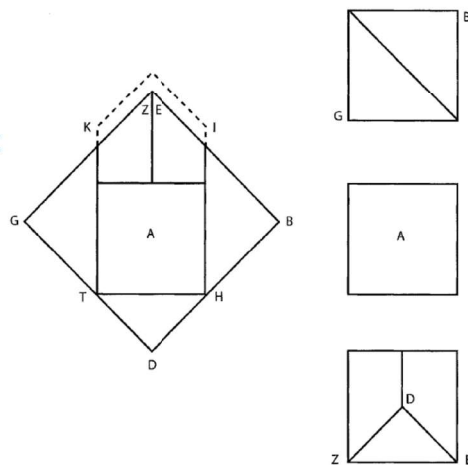


FIGURE 5.58

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Maar ze merken niet op waar de fout [...] optreedt [...] Als we de zijde van elk [eenheids]vierkant ongeveer tien el maken [...] is de zijde van het [grote] vierkant bij benadering zeventien en een derde el⁽²⁾. Maar de zijde van dit vierkant [...] is zeventien en een veertiende⁽³⁾ el [...].

(2) en (3) Leg uit!

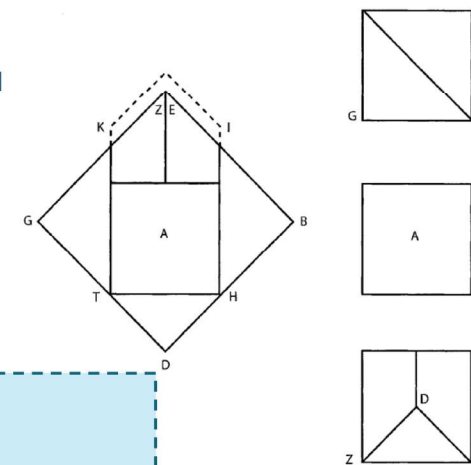


FIGURE 5.58

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Abu al-Wafa' zei: Maar deze figuur die hij construeerde is ingebeeld, en iemand die geen ervaring heeft met de kunst of de meetkunde [...] zou zich kunnen voorstellen dat deze correct is vanwege de correctheid van de hoeken en de gelijkheid van de zijden. [...] Elk van de hoeken van de [drie] driehoeken, namelijk G, B en D, die [ook] hoeken van het vierkant zijn, is een rechte hoek; en de vierde hoek is samengesteld uit twee hoeken die elk een halve rechte hoek zijn [...]. De zijden zijn recht en gelijk, aangezien elk van deze zijden is samengesteld uit een zijde van een van de vierkanten plus de helft van de diagonaal, die gelijk zijn. Het is ook duidelijk dat ze rechte [lijnen] vormen wanneer ze samengevoegd worden [...]

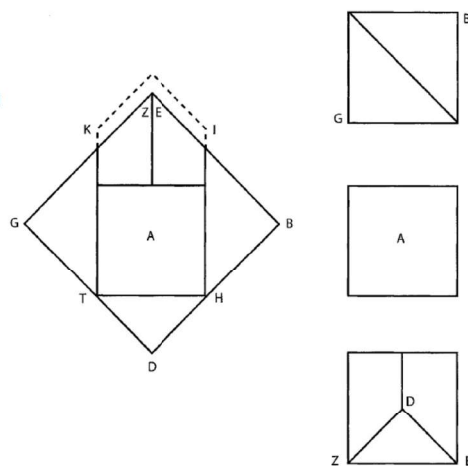


FIGURE 5.58

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

Nogmaals, [...] twee lijnen, HI en TK [...] de diagonaal van vierkant BG is bij benadering veertien en een zevende⁽⁴⁾, en zijde HI is vijftien⁽⁵⁾.

(4) en (5) Leg uit!

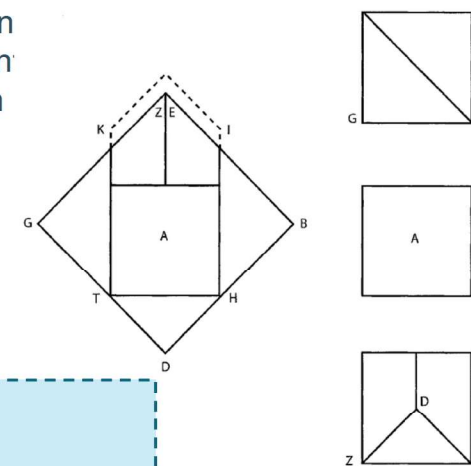


FIGURE 5.58

Terugblik

- gebruik van originele teksten geeft het integreren van geschiedenis in een wiskundeles extra kleur
- in dit voorbeeld zie je hoe twee verschillende manieren om aan wiskunde te doen met elkaar in contact komen

65

KU LEUVEN

Hoe gaat het verder?

- erfenis van de Oude Grieken (niet alleen Euclides, maar ook bv. Apollonius) blijft heel lang dominant in de Islamitisch-Arabische cultuur en in Europa als ideaalbeeld van de wiskunde
- twijfels over vijfde postulaat van Euclides leiden tot het ontstaan van niet-Euclidische meetkunde in de 19de eeuw en dit leidt op zijn beurt tot een nieuwe opvatting over axiomastelsels aan te kijken
- er groeien nog heel wat andere takken aan de boom van de meetkunde

projectieve meetkunde / meetkunde van gekromde oppervlakken /
eindige meetkunde / hogere dimensie dan 2 en 3 / ...

66

KU LEUVEN

Oplossen van vergelijkingen

67

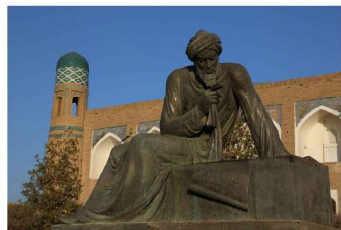
KU LEUVEN

Kwadratische vergelijkingen in de Islamitisch-Arabische cultuur

68

KU LEUVEN

Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi



- ong. 780 tot ong. 850
- uit Khwarizm (nu: Khiva, Oezbekistan)
- wordt omschreven als Perzische wiskundige
- werken over astronomie en over het Indiase talstelsel
- bekendste werk: Hisob al-jabr w'al-muqabala, ong. 825
 - 'a short work on calculating by the rules of completion/restoration and reduction/balancing'
 - completion/restoration: overbrengen van een term naar het andere lid
 - reduction/balancing: 'schrappen' van gelijke termen in beide leden
 - 'al-jabr' wordt 'algebra' bij vertaling naar het Latijn
 - naam Al-Khwarizmi ligt aan de oorsprong van het woord 'algoritme'
 - meest bekende onderdeel: kwadratische vergelijkingen
 - verder ook: praktische meetkunde, lineaire vergelijkingen, ...
 - en ook: toepassingen in het erfrecht

Al-Khwarizmi: kwadratische vergelijkingen

على تسعة وثلاثين ليم السطح العظيم الذي هو سطح رده فيبيع ذلك كله أربعة وستين مائة جدرها وهو ثمانية وهو واحد السطح العظيم فإذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ثلث سطح آت الذي هو لئال وهو جدره ولئال تسعة وهذد صورته



ولما مال واحد وعشرون فرجما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل الئال سطحا مربعيا سيجعل الئال وهو سطح آت ثم نسم اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح آت وهو سطح هن والسطح هن نصار طول السطحين جميعا سطح جده وهذ علمنا ان طول عشرة من العدد لن كل سطح مربع محاسبي الاضلاع والنزايلا فان احد اضلاعه مسنويلا في واحد جدر فذلك السطح وفي الئين جدره فلما قال مال واحد وعشرين يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول سطح هـ جدره اعداد لن سطح جدر اجدر الئال فنقسمنا سطح جدره بنصفين علي نقطة

- 6 types van kwadratische vergelijkingen
 - vierkanten en wortels gelijk aan getallen (bv. $x^2 + 10x = 39$)
- aanvankelijk enkel
 - beschrijving van oplossingsalgoritme
 - voor $ax^2 + bx = c$: $x = \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}$
 - is dit in overeenstemming met onze formule?
- via voorbeelden
- zonder verantwoording

Al-Khwarizmi: kwadratische vergelijkingen

على تسعة وثلاثين ليم السطح العظيم الذي هو سطح رده فيبيع ذلك كله أربعة وستين مائة جدرها وهو ثمانية وهو واحد السطح العظيم فإذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ثلث سطح آت الذي هو لئال وهو جدره ولئال تسعة وهذد صورته



ولما مال واحد وعشرون فرجما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل الئال سطحا مربعيا سيجعل الئال وهو سطح آت ثم نسم اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح آت وهو سطح هن والسطح هن نصار طول السطحين جميعا سطح جده وهذ علمنا ان طول عشرة من العدد لن كل سطح مربع محاسبي الاضلاع والنزايلا فان احد اضلاعه مسنويلا في واحد جدر فذلك السطح وفي الئين جدره فلما قال مال واحد وعشرين يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول سطح هـ جدره اعداد لن سطح جدر اجدر الئال فنقسمنا سطح جدره بنصفين علي نقطة

- 6 types
 - 'wortels', 'vierkanten' en 'getallen'
 - vierkanten gelijk aan wortels ($ax^2 = bx$)
 - vierkanten gelijk aan getallen (...)
 - wortels gelijk aan getallen (...)
 - wortels en getallen gelijk aan vierkanten (...)
 - vierkanten en getallen gelijk aan wortels (...)
 - met voorwaarde 'positieve discriminant', beide oplossingen
 - vierkanten en wortels gelijk aan getallen (bv. $x^2 + 10x = 39$)
- ... want geen negatieve coëfficiënten
- oplossingen strikt positief (dus ook niet 0)

Al-Khwarizmi: kwadratische vergelijkingen, $x^2 + 10x = 39$

- 'We have said enough so far as numbers are concerned, about the six types of equations. Now, however, it is necessary that we should demonstrate geometrically the truth of the same problems which we have explained in numbers.'

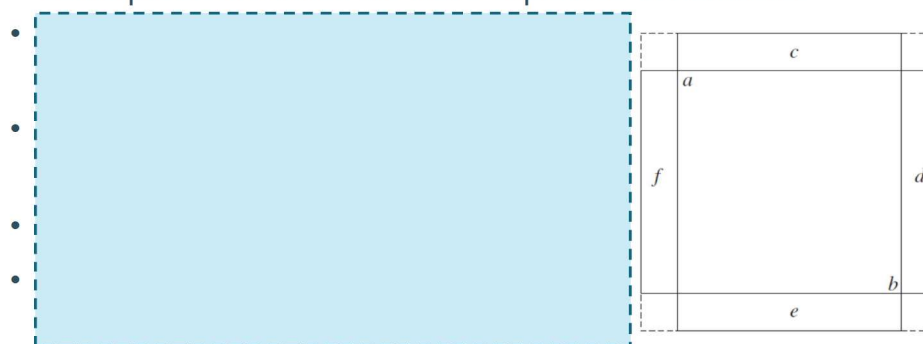


FIG. 11.1

Terugblik

- Reeds in Mesopotamië werden tweedegraadsvergelijkingen opgelost. Ook hier vermoedt men dat de oplossingsmethode gebaseerd was op (andere) meetkundige overwegingen. → zie Zebraboekje Babylonische wiskunde
- Hier kan een duik in de geschiedenis bijdragen aan het beter begrijpen van de leerinhoud.

73

KU LEUVEN

Gehele oplossingen van vergelijkingen in India

74

KU LEUVEN

Gehele oplossingen van eerstegraadsvergelijkingen met twee onbekenden

- dus: zoek gehele getallen x en y zo dat $ax + by = c$, met a , b en c geheel
- Diophantus (Griekse Oudheid) zocht één oplossing voor zijn probleem, wiskundigen in India zochten (en vonden) alle oplossingen
- bijvoorbeeld
 - $2x + 3y = 7$ (1)
 - $6x + 15y = 2$ (2)
- Bhaskara I (7de eeuw)
 - er bestaan gehele getallen m en n zo dat $ggd(a, b) = ma + nb$
- dit geeft oplossingen voor de vergelijking als $ggd(a, b)$ een deler is van c
- enkel dan zijn er oplossingen

75

KU LEUVEN

Hoe gaat het verder?

- er valt nog heel wat meer te vertellen over het oplossen van vergelijkingen in de oude culturen
 - zie hoger voor het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen in Egypte
 - in China loste men stelsels van eerstegraadsvergelijkingen op via wat wij de methode van Gauss-Jordan noemen
 - in de Islamitisch-Arabische cultuur werden derdegraadsvergelijkingen meetkundig opgelost via snijpunten van kegelsneden

76

KU LEUVEN

Hoe gaat het verder?

- Renaissance in Europa: algebraïsche oplossen van derde- en vierdegraadsvergelijkingen

- 3de graad: herleid eerst tot $x^3 = px + q$, een van de oplossingen is

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- start zoektocht naar oplossing voor 5-degraadsvergelijking
- Galois, 1832
 - algemene vergelijking van de vijfde graad kan niet door radicalen opgelost worden
 - begin van de moderne algebra: concept van groep en van veld(uitbreidingen) als tools om dit aan te tonen

Terugblik: drie argumenten om geschiedenis in wiskundelessen te integreren

- het kan de motiverend werken
- verrijkend te beseffen dat veel verschillende culturen hebben bijgedragen aan onze hedendaagse wiskunde en dat wiskunde een deel van onze cultuur is
- het kan bijdragen tot het beter begrijpen van wiskundige begrippen en van wat wiskunde is

Bedankt voor je aandacht!
Vragen welkom!