

Geschiedenis en didactiek van het functiebegrip

Johan Deprez

Leuven, verwendag vakmentoren wiskunde, 4/6/25

Inleiding

Kennismaking

- over mezelf
 - tot en met vorig jaar: vakdidactiek wiskunde
 - verleden als docent wiskunde aan de universiteit (opleidingen handelswetenschappen en biologie/biomedische wetenschappen)
 - voor de vierde keer dit jaar geschiedenis van de wiskunde

Het onderwerp

- Functies zijn uitermate belangrijk in wiskunde en wiskundeonderwijs
 - Felix Klein (1908) promoot functies als overkoepelend idee in onderwijs van wiskunde
 - binnen de zuivere wiskunde: reële functies van een reële veranderlijke, meetkundige transformaties, homomorfismen tussen groepen, ...
 - maar ook waar wiskunde gebruikt wordt in andere wetenschappen: functies als wiskundig model
- Geen 'oud' concept: functies duiken pas laat op in de geschiedenis van de wiskunde
 - We kunnen goed volgen hoe het functiebegrip tot ontwikkeling kwam.
 - Start rond 1700, maar het duurt tot midden jaren 1900 vooraleer het concept in zijn volle rijkdom begrepen wordt.
- De historische ontwikkeling staat niet los van de didactiek.

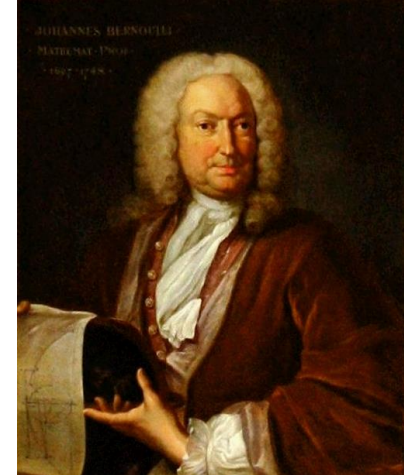
Episode 1: de start

Leibniz en Johann Bernoulli (en Gregory)



- eerste gebruik van het woord ‘functie’
 - Leibniz (1673), ‘The inverse method of tangents, or about functions’ (origineel in het Latijn)
 - in de context van het vinden van het inverse probleem van het vinden van de ‘y-waarden’ van een kromme op basis van een gegeven eigenschap van de raaklijnen of van “other kinds of lines which, in a given figure, perform some function”
 - algemener: een functie beschrijft hoe meetkundige grootheden als subtangenten and subnormalen afhangen van de vorm van een kromme
 - betekenis valt nog niet samen met de huidige betekenis
- betekenis verschuift in latere jaren, onder andere in briefwisseling tussen Leibniz en Johann Bernoulli

Leibniz en Johann Bernoulli (en Gregory)



- eerste gedrukte definitie van ‘functie’
 - Johann Bernoulli (1718), ‘Remarques sur ce qu’on a donné jusqu’ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres’
 - “On appelle fonction d’une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes”
 - “A function of a variable is a quantity composed in any way from this variable and constants”
 - notatie: φx (dus: zonder haakjes)
- een voorloper?
 - James Gregory (1667), ‘Vera circulli et hyperbolae quadratura ...’
 - “We call a quantity composed of other quantities if that quantity results from those other quantities by addition, subtraction, multiplication, division, extracting of roots or by any other imaginable operations.”
 - zonder de naam ‘functie’ te gebruiken

Euler: eerst wat context



- calculus uitgevonden door Newton en Leibniz, onafhankelijk van elkaar
- calculus in de stijl van Leibniz raakt breder bekend door leerlingen van Leibniz, o.a. de Bernoulli's
- Euler
 - leerling van Johann Bernoulli
 - brengt calculus van Leibniz samen in een coherent geheel van drie handboeken
 - geeft functies een centrale plaats in de calculus

Euler over functies

- 1748, 'Introductio in analysin infinitorum'
- "Een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking, bevattende op enigerlei wijze de variabele en getallen of constante grootheden"
- Euler voegt 'analytische uitdrukking' toe aan de definitie van Leibniz → schuift op in algebraïsche richting
- 'analytische uitdrukking' blijkt door Euler heel breed geïnterpreteerd te worden
 - basisbewerkingen en andere operaties (exponentieel, logaritmisch, goniometrisch, afleiden en integreren), ook oneindige processen toegelaten: machtreeksen, niet noodzakelijk éénwaardig, kan ook impliciet bepaald zijn (met moderne notatie: $f(x, y) = c$), variabelen en constanten kunnen complexe waarden aannemen, ...
- notatie $f(x)$

Waarom in deze periode?

- natuurwetenschappelijke revolutie
 - vanaf begin 17de eeuw
 - context: doorgeven van kennis uit het verleden wordt vervangen door het zelf uitvoeren van experimenten en het beschrijven van de bevindingen onder de vorm van natuurwetten in een wiskundige vorm
 - start met Galileo (1564-1642) and Kepler (1571-1630)
 - vooral in de fysica en sterrenkunde nood aan wiskundige beschrijving van verbanden tussen grootheden
- ontwikkeling van notatie in de algebra
 - van grotendeels verbaal naar meer en meer symbolisch
 - maakte het mogelijk om veel informatie op een compacte manier voor te stellen
 - belangrijke rol voor Viète (1540-1603)

Waarom in deze periode?

- ‘uitvinding’ van de analytische meetkunde en de calculus
 - context: verschuiving van het synthetische denken (met grote aandacht voor grondslagen en rigoureuze opbouw) naar meer analytische denken (probleemoplossend, hoe vinden we oplossingen?)
 - Descartes en Fermat, Leibniz en Newton
 - Descartes (1637) ‘La Géométrie’

“If then we should take successively an infinite number of different values for the line y , we should obtain an infinite number of values for the line x , and therefore an infinity of different points”
 - Newton
 - fluent = continuously flowing quantity
 - ... in de rol van onafhankelijke veranderlijke = *quantitas correlata*
 - ... in de rol van afhankelijke veranderlijke = *quantitas relata*

Met een didactische bril...

- sterke focus op de vergelijking van de functie
 - dus geen tabellen en grafieken
 - (wel meetkundige oorsprong)
- is een constante een functie?
 - niet voor Euler!
 - ‘constante functie’ staat in zekere zin haaks op wat we spontaan onder ‘functie’ verstaan
 - vergelijkbaar met de historisch lastige omgang met 0 als getal
 - grensgevallen liggen moeilijk!
- uniciteit van het beeld
 - niet bij Euler!
 - geen scherp onderscheid tussen functie en (wat later) relatie (genoemd wordt)

Met een didactische bril...

- functie is een nieuwe variabele die opgebouwd wordt met de onafhankelijke variabele
 - eerste element: functie is een variabele (anders dan nu!)
 - tweede element: de nieuwe variabele wordt opgebouwd met de onafhankelijke variabele (anders dan in natuurwetenschappen)
 - zie ook de notatie: x en $f(x)$
- twee manieren om naar functies te kijken
 - tweede element sluit aan bij 'input-output-model' van een functie
 - ... sluit minder duidelijk aan bij het 'covariatie-model' van een functie (variabelen x en y variëren samen) zoals dat in de natuurwetenschappen (en andere toepassingsgebieden) dominant is

Met een didactische bril...

- nog twee manieren om naar functies te kijken
 - functie als proces: mentaal uitvoeren van een actie zoals het berekenen van een functiewaarde
 - functie als object: zelfstandige entiteit waarop je operaties kunt uitvoeren (bv. afleiden), die je kunt benoemen (bv. exponentiële functie, ...)
 - niet toevallig dat het concept 'functie' geëxpliciteerd wordt op het ogenblik dat er behoefte is aan een object-kijk omdat er een operatie op toegepast wordt (afleiden)

Periode 0: was er al iets vóór
1700?

De oude culturen

- Egypte, Mesopotamië, China, India
 - uitvoerig gebruik van tabellen
 - voor astronomie
 - hulp bij het rekenen (tabellen van omgekeerden, kwadraten, vierkantswortels, ...)
- Griekse Oudheid / Hellenistische cultuur
 - ook hier tabellen voor de astronomie
 - geometrische algebra, verbaal geformuleerde 'vergelijkingen' van kegelsneden, toepassingen van de exhaustiemethode, ...
- Islamitisch-Arabische cultuur
 - ook hier tabellen voor de astronomie
 - ...
- maar volgens historici van de wiskunde: geen echt functieconcept



Nicolas Oresme

- 14de eeuw, Parijs, later bisschop van Lisieux
- voorloper op het vlak van analyse, onder andere ...
- verschillende wetenschappers in de 14de eeuw bestuderen 'verandering'
 - in het algemeen
 - beweging in het bijzonder
 - onder andere aan het Merton College in Oxford en in Parijs
- Oresme (<1361, publ. 1386), 'De latitudinibus formarum'
 - maakt grafische voorstellingen bij de studie van beweging
 - steunt hierop om eigenschappen te bewijzen

Nicolas Oresme

- een 'vorm' is een fenomeen, bv. snelheid, dat verschillende 'graden van intensiteit' kan hebben
- intensiteiten van vormen staan in relatie tot hun 'extensies', bv. tijd
- grafische voorstelling
 - 'longitude' = 'lengte': tijd, lijnstuk op een horizontale as
 - loodrecht daarop in 'elk' punt lijnstuk met lengte (evenredig met) snelheid op dat ogenblik = 'latitude' = 'breedte'
 - 'lijn van intensiteit' bestaat uit de bovenste punten van de lijnstukken die de snelheden voorstellen

Incipit parvulus tractatus de latitudinibus
formarum s^m Reverendi doctoris magistrum
Nicolaum Oresm. Die decima Januarij



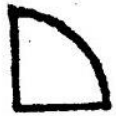
Ornamentum quia latitudines multipliciter variantur multiplices varietates diffinitione discernunt nisi ad figuras geometricas quodammodo referunt. Pro

premissis quibusdam divisionibus latitudinum cum definitionibus suis. species infinitas earundem ad figurarum species infinitas applicabo ex quibus, propositis, clarius apparebit. ¶ Latitudinum quedam uniformis: et quedam difformis. ¶ Latitudo uniformis est illa: que est uniformis per totum. ¶ Latitudo difformis est: que non est eiusdem gradus per totum. ¶ Latitudo difformis dividitur: quia quedam est s^m se totam difformis et quedam non. ¶ Latitudo s^m se totam difformis est: cuius nulla pars est uniformis. ¶ Latitudo non s^m se totam difformis est illa cuius aliqua pars est uniformis. Unde sciat scilicet quod una latitudo sit difformis: et aliqua eius pars sit uniformis ut illa. ¶ Latitudinum s^m se totam difformium: quedam est uniformis et difformis: et quedam difformis et difformis. ¶ Latitudo uniformis et difformis est illa cuius est equalis excessus graduum eorum in per se statum. ¶ Latitudo difformis et difformis sumitur per oppositum. scilicet cuius non est equalis excessus

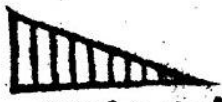
latitudo uniformis



latitudo difformis



difformis s^m se totam



non s^m se totam



difformis difformis



Nicolas Oresme

- verschillende 'vormen'
 - uniform
 - difform
 - uniform difform
 - o.a. eenparig versnelde beweging: 'every uniformly difform quality terminating in zero intensity is imagined as a right triangle'

Incipit parvulus tractatus de latitudinibus
formarum s^m R. eueredu doctore magistram
Nicolau^m Morem. Die decima Januarij



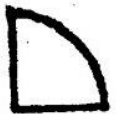
Ornerum quia latitudines multipliciter variantur multiplices varietates difficile discernunt nisi ad figuras geometricas quodammodo referunt. Pro

premissis quibusdam divisionibus latitudinum cum definitionibus suis. species infinitas earundem ad figurarum species infinitas applicabo ex quibus propositis clarius apparebit. ¶ Latitudinum quedam uniformis: et quedam difformis ¶ Latitudo uniformis est illa: que est uniformis per totum. ¶ Latitudo difformis est: que non est eiusdem gradus per totum. ¶ Latitudo difformis dividitur: quia quedam est s^m se tota difformis et quedam non. ¶ Latitudo s^m se totam difformis est: cuius nulla pars est uniformis. ¶ Latitudo non s^m se tota difformis est illa cuius aliqua pars est uniformis. Unde sciat scilicet quod una latitudo sit difformis: et aliqua eius pars sit uniformis ut illa. ¶ Latitudinum s^m se tota difformium: quedam est uniformis et difformis: et quedam difformis et difformis. ¶ Latitudo uniformis difformis est illa cuius est equalis excessus graduum eorum in per se statum. ¶ Latitudo difformis difformis sumitur per oppositum. scilicet cuius non est equalis excessus

latitudo uniformis



latitudo difformis



difformis s^m se tota



si s^m se tota



difformis difformis



Met een didactische bril...

- nu wel tabellen en grafieken!
- Oresme
 - link met natuurwetenschappen veel duidelijker zichtbaar dan bij Leibniz, Bernoulli en Euler
 - sluit duidelijker aan bij covariatie-model

Periode 2: de controverse over de trillende snaar

1-dimensionale golfvergelijking

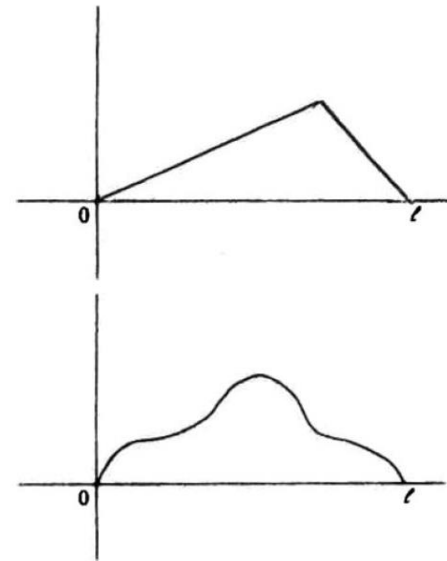


$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- partiële differentiaalvergelijking met functie $y(x, t)$ als onbekende
- randvoorwaarden: $y(0, t) = y(L, t) = 0$ voor alle t
- beginvoorwaarde: $y(x, 0) = f(x)$ op interval van 0 tot L
- probleem werd opgelost door Euler en los daarvan ook door Jean Le Rond d'Alembert rond 1750
- Euler, d'Alembert en Daniel Bernoulli oneens over de functies $f(x)$ die de beginsituatie beschrijven: moet het concept van functie hiervoor misschien uitgebreid worden?

Een algemener functiebegrip?

- d'Alembert: begintoestand moet steeds beschreven worden door één analytische uitdrukking
- Euler: algemener, afwijkend standpunt: begintoestand kan ook beschreven worden door
 - verschillende deelintervallen met verschillende analytische uitdrukkingen
 - een kromme die met de vrije hand getekend is
 - dus: eventueel punten waar er geen afgeleide is
- Daniel Bernoulli
 - op fysische/muzikale grond: grondtoon en boventonen
 - begintoestand kan beschreven worden door oneindige reeks van sinusfuncties: $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/l)$
 - vindt geen weerklank



Een algemener functiebegrip?

- Euler maakt onderscheid tussen
 - ‘continue’ functies
 - beschreven door één analytische uitdrukking
 - komt niet overeen met het huidige gebruik van het woord ‘continue functie’
 - elk klein deeltje van de kromme kan op unieke wijze verder gezet worden
 - komt overeen met de huidige benaming ‘analytische functie’
 - ‘discontinue’ functies
 - zie vorige slide!

Een algemener functiebegrip?

- Euler (1755), ‘Institutiones calculi differentialis’: andere definitie voor ‘functie’

If, however, some quantities depend on others in such a way that if the latter are changed the former undergo changes themselves then the former quantities are called functions of the latter quantities. This is a very comprehensive notion and comprises in itself all the modes through which one quantity can be determined by others. If, therefore, x denotes a variable quantity then all the quantities which depend on x in any manner whatever or are determined by it are called functions... (L. Euler 1755)

- Euler (1763) ‘De usu functionum discontinuarum in analysi’

This “opens for us a new chapter in analysis by allowing us to apply calculus to curves that are not subject to any law of continuity” (Euler, 1763)

- maar: Euler is niet helemaal consequent in het gebruik van zijn beide definities...

Een algemener functiebegrip?

- discussie blijft bestaan tot in de 19de eeuw
- nog veel anderen geven een definitie van functie
- veel definities klinken ruimer dan wat in de praktijk toegepast wordt
- Ponte (1992) over deze periode

“As far as mainstream mathematics is concerned, the identification of functions with analytical expressions would remain unchanged for all of the 18th century. In the 19th century, however, the notion of function underwent successive enlargements and clarifications that deeply changed its nature and meaning.”

Met een didactische bril...

- Euler: 'elke' grafiek stelt een functie voor
- loskomen van de vergelijking blijkt lastig te zijn voor de wiskundige gemeenschap!

Periode 3: 19de eeuw

Fourier: een algemener concept van functie

- naar aanleiding van warmtevergelijking, nog een partiële differentiaalvergelijking
- 1807, maar publicatie pas in 1822
- definitie

In general, the function $f(x)$ represents a succession of values or ordinates each of which is arbitrary. An infinity of values being given to the abscissa x , there are an equal number of ordinates $f(x)$. All have actual numerical values, either positive or negative or null. We do not suppose these ordinates to be subject to a common law; they succeed each other in any manner whatever, and each of them is given as if it were a single quantity.



Fourier: een straffe 'stelling'

- definitie van een algemener concept van functie

...

- 'stelling': alle functies kunnen voorgesteld worden door oneindige reeks van sin- en cos-functies, meer bepaald als f gedefinieerd is op een interval $[-L, L]$, dan is

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

$$\text{waarbij } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ en } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

- 'stelling' zegt dus dat er toch een 'common law' is...
- 'bewijs' van Fourier kon zijn collega's niet overtuigen

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)



- probeerde Fouriers werk acceptabel te maken
- 1829: 'stelling' van Fourier klopt niet
 - er liggen beperkingen op de functies die voorgesteld kunnen worden door zo'n Fourierreeks
- 1837, Dirichlets definitie van functie ...
 - y is a function of a variable x , defined on the interval $a < x < b$, if to every value of the variable x in this interval there corresponds a definite value of the variable y . Also, it is irrelevant in what way this correspondence is established.
- een kleine (?) nieuwigheid: domein van een functie kan beperkt blijven tot een interval
- ... verschilt verder niet veel van (algemene versie van) die van Euler en die van Fourier, maar hij paste ze consequent toe

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)



- functie van Dirichlet
 - definitie: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ rationaal is} \\ 0 & \text{als } x \text{ irrationaal is} \end{cases}$
 - algemener dan Euler: niet gegeven door
 - één of meer analytische uitdrukking(en)
 - door een met de hand getekende kromme
 - overal discontinu (in onze betekenis)
 - kan niet voorgesteld worden door haar Fourierreeks
- functies worden losgekoppeld van hun vergelijking en hun grafiek, en van het beschrijven van een fysische realiteit

er is een vergelijking mogelijk voor de functie van Dirichlet, maar ze is niet evident (dubbele limiet van een rij van functies)

Lobachevsky



- (bekend van de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde)
- formuleerde rond dezelfde tijd een gelijkaardige definitie als Dirichlet
- 1834, ‘On the disappearance of trigonometric series’
“...the general concept of function demands, that one should name a function of x a number that is given for every x and that gradually changes together with x . A value of a function can be given either by analytical expression or by a condition which gives means to test all numbers and to choose one of them, or, at last, dependence may be unknown”

De verruiming van het functiebegrip was best stevig: “pathologische functies”

- functie die oneindig vaak differentieerbaar is in 0, maar waarvan de Taylorreeks in 0 niet naar de functie convergeert (Cauchy)

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ als } x \neq 0 \text{ en } f(0) = 0$$

- functie met oneindig veel discontinuïteiten (functie van Dirichlet)
- functie die overall continu is maar nergens afleidbaar (Weierstrass, 1872)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \text{ met } a \text{ oneven geheel getal, } b \in]0,1[\text{ en } ab > 1 + 3\pi/2$$

- oneindige reeks van continue functies waarvan de limiet niet continu is
- idem voor afleidbare functies en voor integreerbare functies
- ...

De verruiming van het functiebegrip had gevolgen!

- noodzakelijk om telkens af te bakenen voor welke functies een concept, eigenschap, ... van toepassing is...
 - bv. van welke functies kun je een bepaalde integraal nemen?
 - aanvankelijk beperkt tot continue functies, naderhand uitgebreid tot functies met een eindig aantal discontinuïteiten (Cauchy)
- ... en eventueel veralgemening te zoeken voor de kernconcepten van de analyse
 - aanpassingen aan het integraalbegrip om het toepasbaar te maken op een bredere verzameling van functies (Riemann, Lebesgue)

De verruiming van het functiebegrip maakte niet iedereen gelukkig

Poincaré, 1899

“Logic sometimes makes monsters. In former times when one invented a new function it was for a practical purpose; today one invents them purposely to show up defects in the reasoning of our fathers [...]. If logic were the teacher’s only guide, he would have to begin with the most general, that is to say, with the most weird, functions. He would have to set the beginner to wrestle with this collection of monstrosities.”

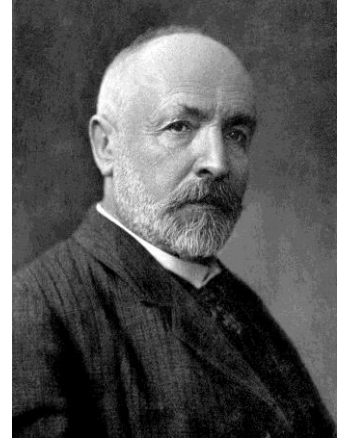


Met een didactische bril...

- zie de bedenking van Poincaré!
- definitie van Dirichlet sluit minder goed aan bij
 - ‘input-output-model’ (want niet per se een regel om van input naar output te gaan)
 - ‘covariatie-model’ (want de afhankelijke variabele is niet langer altijd een geleidelijk veranderende variabele)
- ... sluit beter aan bij nog een derde manier om naar functies te kijken
 - ‘correspondentie-model’: aparte waarden van de ene variabele staan in verbinding met aparte waarden van de andere variabele
- het begrip functie wordt losgekoppeld van de concrete representatie: ook als er geen vergelijking of (‘tekenbare’) grafiek is, kan er sprake zijn van een functie
- vanaf hier ontwikkelt het functiebegrip zich meer autonoom, los van de toepassingsdomeinen

Periode 4: eind 19de en begin 20ste eeuw

Functiebegrrip wordt losgekoppeld van getallenverzamelingen



- onder invloed van
 - verzamelingenleer van Cantor
 - ontwikkeling van moderne algebra met focus op algebraïsche structuren
 - ontwikkeling van de topologie, ...
- Dedekind (1887) ‘Was sind und was sollen die Zahlen’

“By a mapping of a system S a law is understood, in accordance with which to each determinate element s of S there is associated a determinate object, which is called the image of s ”
- Peano (1911) ‘Sulla definizione di funzione’

“the function is a special relation, by which to each value of the variable there corresponds a unique value”
- Hausdorff (1914) ‘Grundzüge der Mengenlehre’

“Ordered pairs make possible the introduction of the concept of functions”

Functiebegrip wordt losgekoppeld van getallenverzamelingen

- Kuratowski (1933), 'Topologie'
 - “Let X and Y be two given sets. By a function whose arguments run over the set X (domain) and whose values belong to the set Y (range) we understand the subset f of the cartesian product $X \times Y$ with the property that for every $x \in X$ there exists one and only one y such that $(x, y) \in f$.
- ong. 1940, pijlnotatie voor functie door William Hurewicz
- Het is deze definitie (via varianten ervan: door Bourbaki (1939), door MacLane en Birkhoff (1967), ...) die gaandeweg haar weg vindt naar de mainstream-wiskunde na WO II
- een grondslagenkwestie
 - eigenlijk moet dit gebeuren in het kader van de axiomatische verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel
 - want 'it is irrelevant in what way this correspondence is established' (zie definitie van Dirichlet) roept problemen op die hun beslag krijgen met het keuze-axioma

Met een didactische bril...

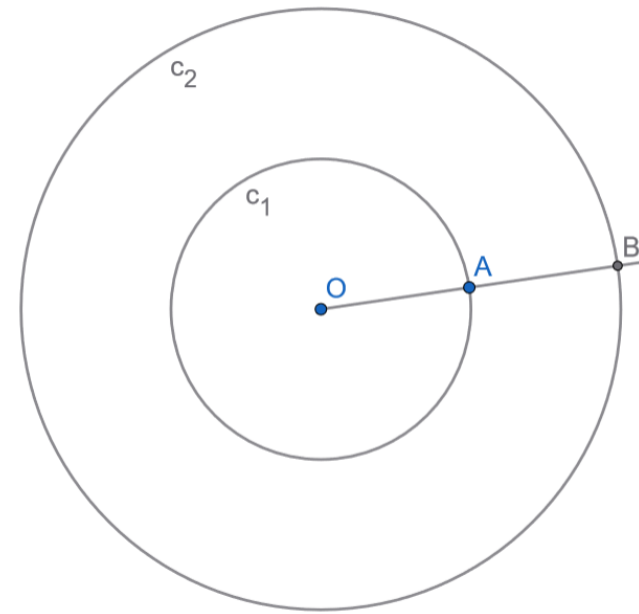
- eerst een praktisch gevolg voor de notatie: nu wordt het nodig om de verzamelingen erbij te zetten
- de variabelen zijn verdwenen!
 - omdat 'het continuum' (de verzameling \mathbb{R}) vervangen is door een willekeurige verzameling
 - 'veranderlijke getallen' zijn vervangen door '(veranderlijke?) elementen van een verzameling'
- de functie wordt nu ondubbelzinnig een apart object
 - een functie valt niet langer samen met de afhankelijke veranderlijke
 - maar heeft een eigen identiteit: de verzameling van de koppels
 - ... en een eigen symbool: f (zonder 'van x ')

Met een didactische bril...

- veranderend beeld van wat een functie is
 - meer statisch (i.p.v. dynamisch)
 - meer discreet (i.p.v. continu)
 - ‘covariatie-model’ verdwijnt uit beeld
 - ‘correspondentiemodel’ wordt prominent
- in termen van representaties: de verzameling van koppels is in feite een (eventueel oneindig grote) tabel

Een onverwachte voorloper

- Galileo heeft natuurlijk een belangrijke rol gespeeld in de wetenschappelijke revolutie die leidde tot de ontwikkeling van het functiebegrip
- maar hij droeg ook bij aan de zuivere wiskunde
- 1638, twee concentrische cirkels
 - 1-op-1-correspondentie tussen de punten van cirkel c_1 en cirkel c_2
 - beide cirkels hebben evenveel punten!
 - ook al hebben ze niet dezelfde omtrek
- en ook: bijectie natuurlijke getallen tussen getallen en hun kwadraten



Nog twee late evoluties

- ‘veralgemeende functies’ in ingenieurswetenschappen en fysica
 - ontstaan in ingenieurswetenschappen en fysica
 - Oliver Heaviside gebruikte de Heaviside-functie ($f(x) = 0$ als $x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $x \geq 0$) en haar ‘afgeleide’
 - delta-functie (Paul Dirac): $\delta(x) = 0$ voor alle $x \neq 0$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
 - Laurent Schwarz, 1945
 - ‘veralgemeende functies’ zijn ‘distributies’, d.w.z. (speciale) afbeeldingen die (specifieke) functies afbeelden op getallen
 - kadert binnen de maattheorie en de functionaalanalyse
 - oplossing voor de kwestie die aan de basis lag van de controverse over de trillende snaar: distributies beschrijven oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen
- categorietheorie: ‘functie’ wordt een ongedefineerd begrip in een abstractere theorie

Slot

Nog twee take-away-messages

- help leerlingen om een rijk begrip van ‘functie’ op te bouwen
 - verschillende representaties (tabel, vergelijking, grafiek, beschrijving in woorden) / verschillende ‘modellen’ (covariatie, input-output, correspondentie) / functie als proces en functie als object / discreet en continu / statisch en dynamisch
 - “no single formal definition can include the full content of the function concept”
 - vakdidactici Vinner en Tall: ‘concept definition’ en ‘concept image’
 - doorheen de geschiedenis is het begrip gegroeid van concreet naar abstract via een stapsgewijze verruiming van het concept; gun de leerlingen ook zo’n traject waarbij ze tijd krijgen om te groeien in de richting van het abstracte concept

Nog twee take-away-messages

- doe recht aan functies in de wiskunde zelf maar ook aan functies voor gebruik in andere domeinen
- vanaf een zeker punt zijn functies in toepassingen niet mee geëvolueerd met de wiskunde
- dit zorgt ook nu nog voor verschillen in de manier waarop met functies gewerkt wordt
 - bv. in toepassingen spelen de variabelen een belangrijke rol en bestaat de functie als zelfstandig object nauwelijks
 - bv. ‘covariatie-model’ is het belangrijkste voor toepassingen
- op een aantal punten is een zekere ‘vertaling’ nodig
 - bv. op het vlak van notaties, bv. f' versus dy/dx

Dank u voor uw aandacht!