

Leren modelleren

Inhoud

1. Inleiding
2. Modelleren met eerstegraadsfuncties
3. Bierkragen modelleren met exponentiële functies
4. Flessen modelleren met veeltermfuncties
5. Olifantenpopulaties modelleren met matrices

1. Inleiding

Zowel in de omgangstaal als in de context van het bedrijven van wiskunde heeft het woord ‘model’ heel veel verschillende betekenissen. In deze loop willen wij inzoomen op één van die betekenissen: een model is een wiskundig object (functie, matrix, integraal, differentiaalvergelijking, meetkundige figuur...) dat gebruikt wordt om een fenomeen uit de realiteit te beschrijven, meestal nadat je de realiteit vereenvoudigd of geïdealiseerd hebt. We hebben het dus bijvoorbeeld niet over de kartonnen modellen van een ruimtefiguur, het balansmodel dat kan helpen om vergelijkingen te leren oplossen, het Poincarémodel voor niet-euclidische meetkunde, deelverzamelingen als model voor combinaties, het deeltjesmodel of het atoommodel in de fysica...

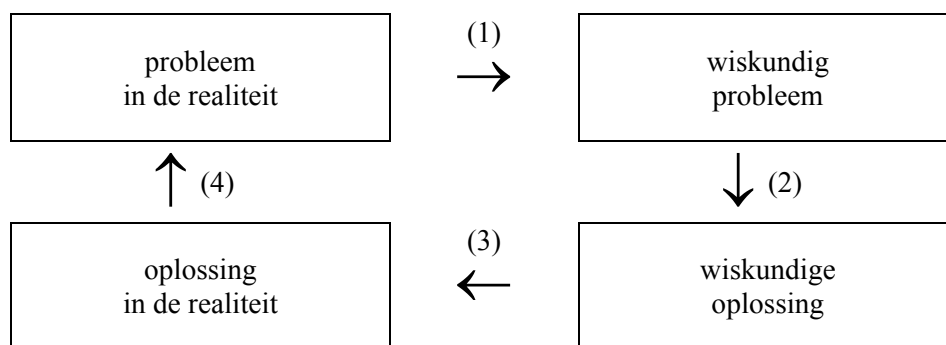
Het gebruik van wiskunde in de fysica is het oudste en bekendste voorbeeld van wiskundig modelleren, maar tegenwoordig zijn er in meer en meer domeinen fenomenen die beschreven worden aan de hand van wiskundige modellen. Dat is geen toeval: wiskundige modellen zijn krachtige hulpmiddelen om inzicht te krijgen in deze fenomenen uit de realiteit. Als je over een model beschikt, kun je (via berekeningen of simulatie) voorspellingen maken, diverse scenario's onderzoeken en leren hoe je kunt ingrijpen in de realiteit. Eenzelfde model kun je bovendien vaak in verschillende contexten gebruiken. Je vindt wiskundige modelleerders volop aan de universiteiten, zowel in de departementen (toegepaste) wiskunde en statistiek als daarbuiten, onder ingenieurs, biologen, economen, psychologen... Ook in de researchafdelingen van grote bedrijven vind je ze terug. Aan een aantal universiteiten kun je specifieke cursussen over wiskundig modelleren volgen. Het gaat met andere woorden over een volwaardige tak van de wiskunde, één van de kamers in het grote huis van de wiskunde.

Natuurlijk kent het gebruik van wiskundige modellen ook serieuze beperkingen. Om te passen in eenvoudige wiskundige formules moet de realiteit vaak geïdealiseerd worden, worden bepaalde facetten bewust niet in rekening gebracht... Modellen zijn vaak ook maar geldig binnen een bepaald domein. Daarom moeten de resultaten van berekeningen binnen modellen met de nodige kritische zin geïnterpreteerd worden.

We vinden dat ook leerlingen in het secundair onderwijs de kamer van de wiskundige modellen nu en dan moeten betreden. Een eerste argument is dat hun beeld van het wiskundige huis anders onvolledig

is. Bovendien is het van belang voor hun verdere studies, voor hun beroepsleven en voor het functioneren in onze moderne maatschappij dat ze inzicht krijgen in de kracht en de beperkingen van wiskundige modellen.

Nu is het natuurlijk zo dat toepassingen reeds een zekere aandacht krijgen in ons wiskundeonderwijs. Toch zien we hier nog ruimte voor progressie. Leerlingen werken vaak met kant-en-klare modellen die door anderen bedacht zijn, bijvoorbeeld wiskundige toepassingen in fysica. Dat moet natuurlijk blijven want het is belangrijk dat leerlingen dergelijke klassiekers onder de wiskundige modellen leren gebruiken. Het mag daar echter niet bij blijven. Bepaalde aspecten van het modelleren blijven op deze manier immers buiten beeld. In deze loop willen we daarom expliciet aandacht besteden aan de subtiele relatie tussen de realiteit (de linkerkant in de eenvoudige versie van de zogenaamde modelleringscyclus die je in de onderstaande figuur vindt) en het wiskundige model (de rechterkant).



De modelleringscyclus toont dat het oplossen van een probleem uit de realiteit in verschillende fasen verloopt:

- (1) het vertalen van het realistische probleem in een wiskundig probleem;
- (2) het oplossen van het wiskundig probleem;
- (3) het vertalen van de wiskundige oplossing naar de realiteit;
- (4) het kritisch bekijken van de oplossing in functie van het gestelde probleem.

De stappen (1), (3) en (4) zijn typisch voor het werken met wiskundige modellen. Je leert ze maar door er expliciet aandacht aan te besteden en door het modelleringsproces dus effectief met de leerlingen te doorlopen. Enkele voorbeelden van vragen die in dat verband aan bod kunnen komen, zijn: op welke punten wordt er vereenvoudigd, waarom wordt voor dit wiskundig model gekozen en niet voor een ander, over welk domein is het model geldig, wat betekenen de resultaten van de berekeningen in de realiteit, moeten we de gekozen waarden van de parameters bijsturen, hoe gevoelig zijn de resultaten voor kleine veranderingen in de parameters, moeten of kunnen we het model verbeteren of verfijnen of beter afstellen?... Wiskundig modelleren vereist kennis, vaardigheden en attitudes die verschillen van die binnen de zuivere wiskunde (en die er soms zelfs haaks op staan).

We werken in deze loop drie voorbeelden uit voor de derde graad, maar ook één voor de tweede graad. Je hoeft inderdaad niet te wachten tot de derde graad om de leerlingen te laten kennismaken met wiskundig modelleren. Eerstegraadsfuncties zijn vanwege hun eenvoud erg gegeerd bij het wiskundig modelleren. We laten in paragraaf 2 zien hoe je leerlingen uit het derde jaar in contact kunt brengen met wiskundig modelleren in de context van eerstegraadsfuncties. In de paragrafen 3 en 4 modelleren we met ingewikkelder functies: exponentiële functies en veeltermfuncties van een hogere graad. In de laatste paragraaf laten we leerlingen nadenken over een matrixmodel voor een olifantenpopulatie. Zoals je merkt hebben we ons in deze loop beperkt tot ‘deterministische modellen’ en hebben we statistische modellen buiten beschouwing gelaten.

Het is de eerste keer dat we expliciet een loep wijden aan wiskundig modelleren, maar we hebben al eerder stukken geschreven die heel goed bij deze loep passen. Heel wat van dat materiaal vind je in het boek [5]. Materiaal dat vrij beschikbaar is op onze website is een loep over matrices (UW 5/1) en een spinnenwebbijdrage over het fileprobleem (UW 8/2). Van recentere datum zijn de loep over migratie- en Lesliematrices (UW 19/1) en de loep over het logistische groeimodel (UW 22/2). En heel recent nog (UW 25/3) hadden we het over modellen in het verkeer.

2. Modelleren met eerstegraadsfuncties

Inleiding

Eerstegraadsfuncties worden in het derde jaar behandeld. Deze functies worden heel vaak gebruikt als wiskundige modellen van fenomenen uit de realiteit. Je kunt leerlingen dus in het derde jaar al in contact brengen met het gebruik van functies als wiskundige modellen. We laten zien hoe dat zou kunnen gebeuren. In de derde graad is lineaire regressie één van de keuzeonderwerpen uit het leerplan. Dat kun je zien als een vervolg op wat wij hier voorstellen voor het derde jaar. In dat keuzeonderwerp leer je dan een meer gesofisticeerde manier om een lineair model te associëren aan een dataset en om te beoordelen in hoeverre een lineair model geschikt is.

Om het concreet te maken, hebben we alles uitgeschreven onder de vorm van werkteksten. We hebben de vragen bewust niet te sterk gedetailleerd. In de praktijk kun je beter via onderwijsleergesprekken werken. Zo kun je beter inspelen op wat er uit de klas komt. De vragen uit de werktekst zijn dan de kernvragen. Voor hulpvraagjes kun je je inspireren op de antwoorden die we in de werktekst geven. Je hoeft je overigens niet verplicht te voelen om alles wat in die antwoorden beschreven wordt ook daadwerkelijk in de klas te behandelen.

Voorbeeld 1

De eerste werktekst is bedoeld als kennismaking met het concept wiskundig model. Dat gebeurt binnen de context van prijzen voor het drukken van een flyer. De prijzen voor de flyers vonden we op <http://flyer.eu/drukwerk/Flyers> bij de Light Budget flyers en je kunt de leerlingen natuurlijk het best daar naartoe sturen. Om de onderstaande werktekst vlot leesbaar te houden en omdat de prijzen allicht onderhevig zijn aan veranderingen in de tijd, geven we in de werktekst hieronder zelf tabelletjes met de prijzen. Eerst gebruiken de leerlingen een eerstegraadsfunctie die exact overeenkomt met de prijzen uit de tabel. Nadien veranderen we het formaat van de flyer en kunnen de prijzen uit de tabel niet meer exact door een eerstegraadsfunctie weergegeven worden. We thematiseren dan enkele belangrijke aspecten van het modelleren: vereenvoudigen of idealiseren van de realiteit, expliciete aandacht voor verschillen tussen het model en de realiteit, interpreteren van de parameters uit het model, ...

Flyers drukken

Onze school bestaat 150 jaar en dat mag natuurlijk niet onopgemerkt voorbijgaan. Het schoolbestuur en de directie organiseren allerlei activiteiten, maar ook de leerlingen krijgen een budget om hun duit in het zakje te doen. Voor de fuif die ze houden, willen ze een flyer verspreiden in de omliggende gemeenten. Hoeveel flyers ze zullen bestellen, laten ze

afhangen van de prijs. Op het internet (<http://flyer.eu/drukwerk/Flyers>) vinden ze de volgende prijzen voor een Light Budget flyer in A4-formaat:

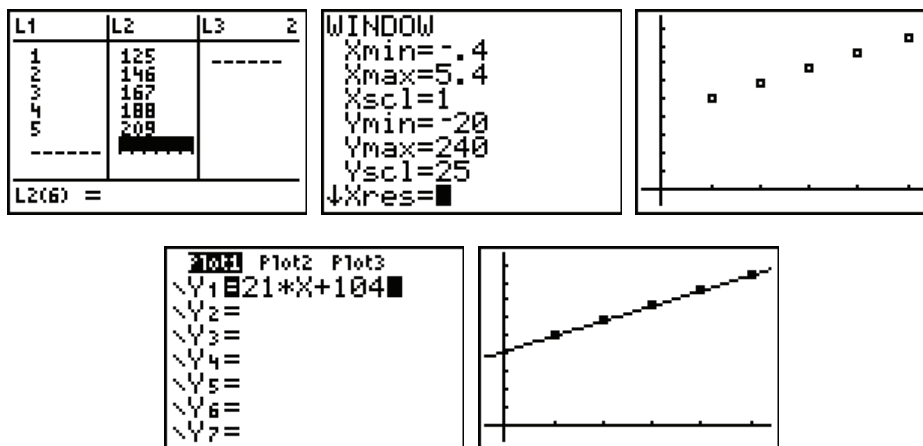
aantal exemplaren	1000	2000	3000	4000	5000
prijs (in EUR)	125	146	167	188	209

Wat onmiddellijk opvalt, is het volgende: hoewel je voor 5000 exemplaren natuurlijk meer betaalt dan voor 1000, is de prijs per exemplaar wel beduidend lager.

- Hoe komt dat? Welke systematiek zit er achter de prijzen in de tabel? Kun je een formule vinden die bij de tabel past? Stel hierbij de prijs (in EUR) voor door p en de hoeveelheid (in eenheden van 1000 exemplaren) door x . Wat is een faire prijs voor 4300 flyers?

(De prijs is samengesteld uit twee delen. De kosten hangen voor een deel af van het aantal exemplaren, zoals bijvoorbeeld de kost voor het papier. Per 1000 exemplaren wordt hiervoor 21 EUR gerekend. In economische termen wordt de 21 EUR ook wel de marginale kostprijs genoemd: de supplementaire kost voor één bijkomende eenheid (van 1000 exemplaren). Een ander deel van de kosten hangt niet af van het aantal exemplaren. Dat zijn de vaste kosten. Denk bijvoorbeeld aan: het opnemen van de bestelling, het instellen van de machine, het opstellen van de factuur... Je kunt uitrekenen dat de vaste kosten hier 104 EUR bedragen. Als er meer exemplaren gedrukt worden, worden die vaste kosten over meer exemplaren verdeeld en daarom wordt de prijs per exemplaar dan lager.

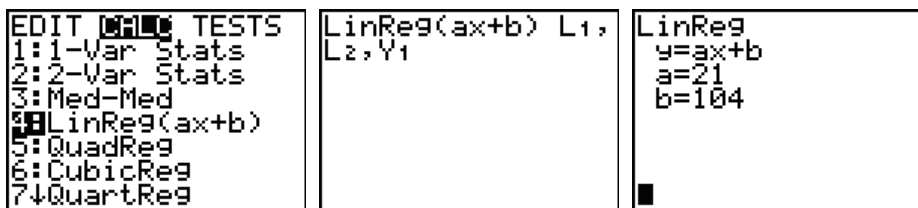
Als je de gegevens m.b.v. je grafische rekenmachine uitzet in een grafiek (hoeveelheid op de horizontale as en prijs op de verticale as), zie je vijf punten die op een rechte liggen. De vergelijking van deze rechte is $p = 21x + 104$.



De marginale kostprijs is de richtingscoëfficiënt van de rechte en de vaste kostprijs is de constante term in de vergelijking. De formule $p = 21x + 104$, met daarin de twee cruciale getallen 21 en 104, kun je zien als een beknopte ‘samenvatting’ van de tabel. Het gaat over een eenvoudige formule die samenhangt met en inzicht geeft in de manier waarop de prijs gevormd wordt.

Met de formule kun je de prijs voor 4300 flyers nu zonder probleem berekenen: 194,3 EUR. Controle op de website is wat teleurstellend: wie 4300 flyers wil, moet er 5000 bestellen...

Je kunt de vergelijking van de rechte zelf opstellen door te vertrekken van (om het even welke) twee van de vijf punten. Als je dat wil, kun je ook laten zien hoe de rekenmachine de vergelijking voor ons kan opstellen:



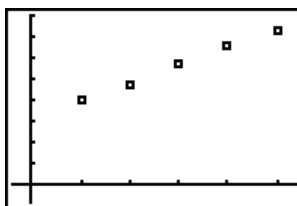
Je hoeft hier niet in te gaan op de achtergrond van het commando dat de rekenmachine gebruikt. In het vervolg hebben we er voor gekozen om slechts spaarzaam van dit commando gebruik te maken, maar als je wilt, kun je dat gerust vaker doen.)

Er is nog een ander ontwerp voor de flyer in de running. Daardoor ligt het formaat nog niet vast. Misschien kiezen de leerlingen wel voor Carre L. De prijzen voor het drukken van flyers in dat formaat vind je in de onderstaande tabel:

aantal exemplaren	1000	2000	3000	4000	5000
prijs (in EUR)	99	120	142	163	183

2. Zoek ook nu naar de systematiek achter de prijzen in de tabel en naar een formule die de tabel samenvat.

(De situatie is nu minder duidelijk. De supplementaire kost voor 1000 exemplaren meer is niet altijd dezelfde: achtereenvolgens 21, 22, 21 en 20 EUR. Daaruit kunnen we afleiden dat de vijf punten niet op één rechte liggen. Er is dus geen eerstegraadsvergelijking die de prijs geeft in termen van het aantal exemplaren. Je zou het daar bij kunnen laten. Als je echter naar de onderstaande schermafdruck kijkt, zie je dat de punten bijna op één rechte liggen.



Hoewel we dus geen eerstegraadsvergelijking meer hebben die de exacte prijzen geeft, kunnen we wel een eerstegraadsvergelijking vinden die de prijzen bij benadering beschrijft. Je kunt bijvoorbeeld gebruik maken van het eerste en laatste van de vijf punten. Dan vind je de formule $p = 21x + 78$. Deze formule geeft ons een goed idee van de prijs van het drukwerk: voor 1000, 2000 en 5000 exemplaren geeft ze de correcte prijs en voor 3000 en 4000 exemplaren zit ze er amper 1 EUR naast. Waarom de drukker hier afwijkt van de formule, daar hebben we het raden naar...

De moraal van het verhaal is dat we nog altijd gebruik kunnen maken van een eenvoudige formule om de tabel samen te vatten, tenminste als we ons tevreden kunnen stellen met benaderende waarden voor de prijzen. Deze manier van werken staat haaks op wat we gewoon zijn binnen de zuivere wiskunde, maar in de praktijk is het heel vaak zo dat we tevreden zijn met een eenvoudige formule die de realiteit benaderend beschrijft. Zo'n eenvoudige formule wordt dan een wiskundig model genoemd.

De formule hierboven is niet de enige mogelijkheid. Je zou bijvoorbeeld ook gebruik kunnen maken van de formule $p = 21x + 78,5$. Je zit dan drie keer 0,5 EUR boven en twee keer 0,5 EUR onder de prijs uit de tabel. Het is de moeite waard om beide formules met elkaar te vergelijken. Een nadeel van de nieuwe formule is dat ze de prijs geen enkele keer helemaal juist weergeeft. De oude formule zat drie keer juist, maar twee keer te laag.

Ze zit dus gemiddeld te laag. De tweede formule zit drie keer te hoog en twee keer te laag. Gemiddeld gezien zit ze maar een klein beetje hoger dan de werkelijke kostprijs. Bovendien is het verschil met de waarden in de tabel in absolute waarde nu nooit groter dan 0,5.

De schermafdrruk hieronder toont dat ook de rekenmachine met een formule voor de dag komt, en dat die nog anders is dan de vorige twee:

```
LinReg
y=ax+b
a=21.1
b=78.1
```

Wellicht leidt het te ver om hier met de leerlingen in te gaan op de achtergrond van deze formule, maar helemaal uitgesloten is het niet: als je voor elke waarde in de tabel het verschil maakt tussen die waarde en de overeenkomstige waarde volgens de formule, die verschillen vervolgens kwadrateert en die vijf kwadraten ten slotte optelt, dan is die som kleiner dan bij de vorige twee vergelijkingen. De rekenmachine kiest er die vergelijking uit waarvoor deze som zo klein mogelijk is.

We stellen dus vast dat er nu niet meer één 'juiste' vergelijking is, maar dat er meerdere formules te bedenken zijn en dat er voor elk van die formules wel goede argumenten te geven zijn. Ook dat is anders dan in de zuivere wiskunde, waar er bij één vraag altijd juist één goed antwoord is.)

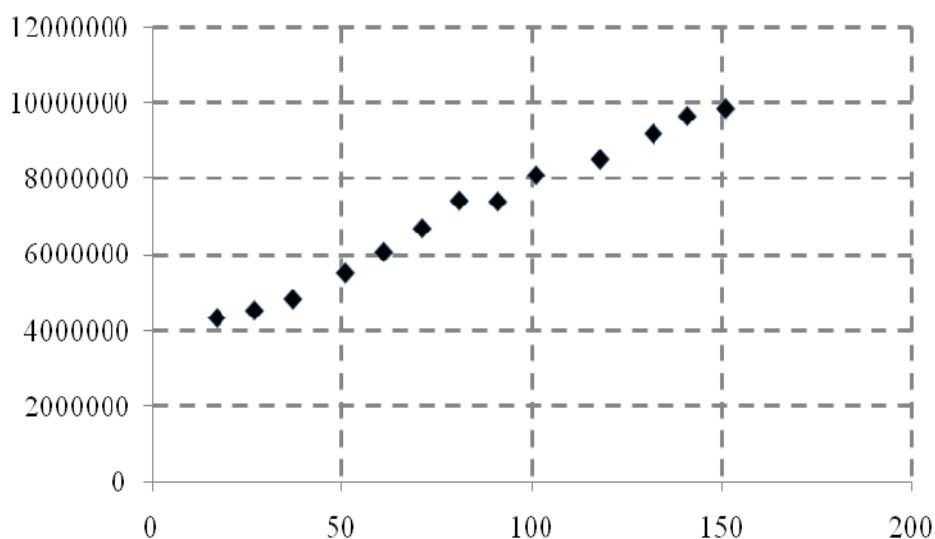
Voorbeeld 2

In het eerste voorbeeld bleven de getallen erg eenvoudig. Nu werken we met ingewikkelder gegevens: de evolutie van het aantal inwoners van België. De punten sluiten nu ook minder nauw aan bij een rechte. We besteden veel aandacht aan de verschillen tussen model en realiteit en laten leerlingen daar een verklaring voor zoeken op basis van wat ze weten over Belgische geschiedenis.

De Belgen door de jaren heen

Sinds het ontstaan van ons land en tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw heeft men ongeveer om de 10 jaar een volkstelling gehouden. Hieronder zie je een tabel met de gegevens over het aantal inwoners van ons land van 1847 (toen de eerste volkstelling plaatshad) tot 1981. In de figuur daaronder zijn dezelfde gegevens in een grafiek uitgezet.

jaar	aantal jaar na 1830	aantal inwoners
1847	17	4 337 196
1857	27	4 529 560
1867	37	4 827 833
1881	51	5 520 009
1891	61	6 069 321
1901	71	6 693 548
1911	81	7 423 784
1921	91	7 401 353
1931	101	8 092 004
1948	118	8 512 195
1962	132	9 189 741
1971	141	9 650 944
1981	151	9 848 647



Je ziet op de grafiek dat de bevolking in de onderzochte periode zeker niet perfect gelijkmatig gegroeid is, maar dat de punten toch redelijk goed aansluiten bij een rechte. Eén mogelijkheid voor zo'n rechte is de rechte door de uiterste twee punten.

1. Teken deze rechte in de figuur. Stel ook de vergelijking van deze rechte op. Rond eindresultaten af tot gehele getallen. Wat is de betekenis van de constante term? En van de richtingscoëfficiënt?

(De vergelijking is $y = 41\,130x + 3\,637\,982$, waarbij y het aantal inwoners voorstelt en x de tijd in jaar sinds 1830. De constante term is de y -waarde voor $x=0$ en geeft dus het (geschatte) aantal inwoners in 1830. De richtingscoëfficiënt geeft aan met hoeveel y toeneemt als x met één eenheid toeneemt, m.a.w. de richtingscoëfficiënt geeft aan dat er jaarlijks 41 130 inwoners bijkomen volgens het eerstegraadsmodel.)

De eerstegraadsfunctie is een aanvaardbaar wiskundig model voor de groei van de bevolking in de onderzochte periode, maar toch zie je ook duidelijke afwijkingen: enkele punten liggen wat verder van de rechte en er zijn enkele periodes waarin de groei sneller of trager verloopt dan de rechte aangeeft.

2. Overloop de hele periode systematisch en beschrijf enkele verschillen tussen de werkelijke bevolkingsaantallen en het wiskundig model. Kun je een verklaring geven

voor deze verschillen? In welk jaar is het verschil tussen het model en de gegevens het grootst?

(In het begin van de periode verloopt de groei trager dan de rechte aangeeft. Tussen 1847 en 1857 groeide de bevolking bijvoorbeeld maar met gemiddeld 19 236 personen per jaar i.p.v. de 41 130 personen per jaar uit het model. Daardoor liggen het tweede en derde punt onder de rechte. Nadien groeit de bevolking sneller dan het model aangeeft. Dit is de periode waarin België industrialiseerde. Hoewel het een periode met veel sociale ellende was, groeide de bevolking toen blijkbaar erg snel aan. Op het einde van deze periode is de afwijking tussen realiteit en model het grootst. Verder is de eerste wereldoorlog duidelijk te zien op de grafiek aan de bevolkingsafname tussen $x=81$ (1911) en $x=91$ (1921). De periode rond de tweede wereldoorlog laat geen terugval in de bevolking zien, maar wel een lagere groeisnelheid. De jaren vijftig en zestig van de vorige eeuw laten een snelle groei zien, de zogenaamde babyboom. In de jaren zeventig ten slotte zien we een terugval, wanneer grote gezinnen niet langer de norm zijn.)

We stellen vast dat het model wel de globale evolutie van de bevolkingsaantallen kan weergeven, maar dat er anderzijds heel wat gebeurtenissen zijn die niet in het model verwerkt zijn. Het gaat dus echt om een vereenvoudigde en geïdealiseerde weergave van de werkelijkheid.

3. Hoeveel inwoners voorspelt dit model voor 2011? Zoek het werkelijke aantal op. Maak ook een voorspelling voor 2020.

(Het model voorspelt 11 082 512 inwoners voor 2011. Het werkelijke aantal lag een beetje lager: 10 984 468. Voor 2020 worden 11 452 682 inwoners voorspeld.)

4. Vanaf 1988 zijn er jaarlijks gegevens over de bevolkingsaantallen. Men hoeft daarvoor niet langer een beroep te doen op de volkstellingen. Ga zelf op zoek naar deze gegevens. Geeft het eerstegraadsmodel dat we hierboven opgesteld hebben nog een goede beschrijving van de bevolkingsaantallen?

(Je vindt de gegevens bijvoorbeeld op de website <http://statbel.fgov.be> > Bevolking > Loop van de bevolking. Ook nu zie je wel wat afwijkingen, maar grosso modo geeft het model de evolutie van de bevolking goed weer.)

Voorbeeld 3

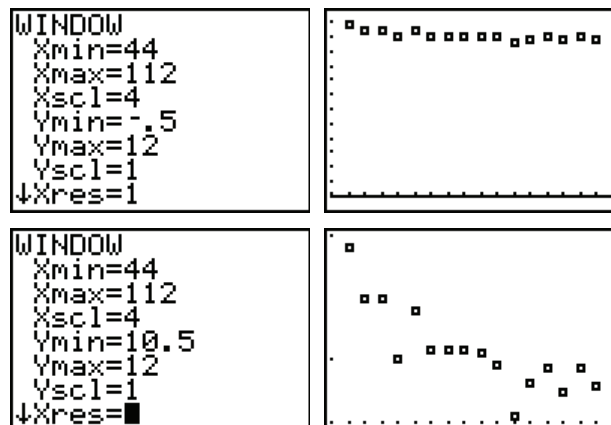
Het volgende voorbeeld hebben we in Uitwiskeling al eens eerder opgevoerd. In de loop over wiskunde uit de krant (UW 23/4) werkten we het uit voor leerlingen uit de derde graad, in het kader van lineaire regressie. Nu gebruiken we dezelfde gegevens voor een eenvoudigere opgave, bedoeld voor leerlingen uit het derde jaar.

Naar de Olympische Spelen

De tabel hieronder toont de tijden van de winnaars van de 100-meterloop op de naoorlogse Olympische Spelen.

jaar	stad	winnaar vrouwen	tijd (in s)	winnaar mannen	tijd (in s)
1948	London	Blankers-Koen Francina	11,9	Dillard Harrison	10,3
1952	Helsinki	Jackson Marjorie	11,5	Remigino Lindy	10,4
1956	Melbourne	Cuthbert Elizabeth	11,5	Morrow Bobby Joe	10,5
1960	Rome	Rudolph Wilma	11,0	Hary Armin	10,2
1964	Tokyo	Tyus Wyomia	11,4	Hayes Robert	10,0
1968	Mexico City	Tyus Wyomia	11,08	Hines James	9,95
1972	Munich	Stecher Renate	11,07	Borzov Valery	10,14
1976	Montreal	Richter Annegret	11,08	Crawford Hasely	10,06
1980	Moscow	Kondratyeva Lyudmila	11,06	Wells Allan	10,25
1984	Los Angeles	Ashford Evelyn	10,97	Lewis F. Carlton	9,99
1988	Seoul	Griffith Joyner D. Florence	10,54	Lewis F. Carlton	9,92
1992	Barcelona	Devers Gail	10,82	Christie Linford	9,96
1996	Atlanta	Devers Gail	10,94	Bailey Donovan	9,84
2000	Sydney	Jones Marian	10,75	Greene Maurice	9,87
2004	Athens	Nesterenko Yuliya	10,93	Gatlin Justin	9,85
2008	Beijing	Fraser Shelly-Ann	10,78	Bolt Usain	9,69

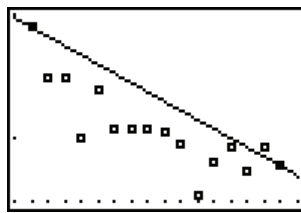
Hieronder zie je twee versies van een grafiek waarin de tijden van de vrouwelijke winnaars uitgezet zijn, met een verschillend tekenvenster. Op de horizontale as hebben we niet het jaartal gezet, maar de tijd in jaar sinds 1900.



Op de vraag of deze punten ongeveer op een rechte gelegen zijn, antwoord je wellicht ja als je naar de bovenste grafiek kijkt en wellicht neen als je je baseert op de onderste. Wat er ook van zij, men kan in situaties als deze zeker nog een eerstegraadsmodel gebruiken om de trend uit te drukken die in de cijfers aanwezig is.

1. Stel de vergelijking op van de eerstegraadsfunctie die bepaald wordt door de uiterste twee punten. Vind je dit een goed wiskundig model voor de gegevens? Geef een vergelijking als dat inderdaad het geval is. Rond eindresultaten af op drie decimalen.

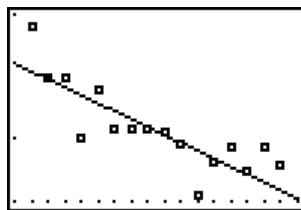
(De onderstaande schermafdruk toont de grafiek van deze eerstegraadsfunctie.



Het is duidelijk dat de rechte door de uiterste twee punten dit keer geen goed model levert. Bijna alle punten liggen onder de rechte.)

2. Stel de vergelijking op van de eerstegraadsfunctie die bepaald wordt door de gegevens van 1952 en 2000. Is dit een goed wiskundig model voor de gegevens? Geef een vergelijking als dat inderdaad het geval is. Rond eindresultaten af op drie decimalen.

(De onderstaande schermafdruk toont dat we nu een veel beter model krijgen.)



De vergelijking is $y = -0,016x + 12,313$.)

3. Wat betekent de richtingscoëfficiënt in deze context? En de constante term?
(De trend is dat de tijd van de winnaar elk jaar met 1,6 honderdsten van een seconde afneemt, of: elke editie van de spelen gaat er 6,4 honderdsten van een seconde af. De constante term is de waarde die het model geeft voor de tijd van de winnares in 1900. In de realiteit is er geen waarde die daar mee overeenkomt: de moderne versie van de Olympische Spelen werd toen al wel georganiseerd, maar vrouwen mochten nog niet deelnemen.)
4. Waag je eens aan een voorspelling van de tijd van de vrouwelijke winnaar op de Olympische Spelen van 2012, 2016 en 2020. Mag je binnenkort een winnares verwachten met een tijd onder de 10 seconden?

(Het model uit vraag 2 geeft (afgerond op twee decimalen): 10,52, 10,46 en 10,39 seconden. Er liggen dus nieuwe records in het verschiet. Anderzijds lijkt het er op dat het nog wel een tijdje zal duren eer de winnares onder de 10 seconden duikt.)

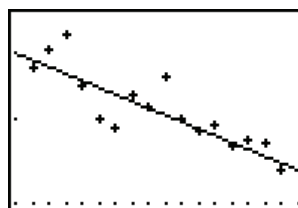
Voor de tijden van de mannelijke winnaars gebruiken we het volgende eerstegraadsmodel:

- de richtingscoëfficiënt bepalen we m.b.v. de uiterste twee punten;
 - de rechte gaat door het punt gaat dat correspondeert met het jaar 1976.
5. Stel de vergelijking van dat eerstegraadsmodel op en maak een grafische voorstelling.

(De grafiek zie je in de onderstaande schermafdrukken.)

```

WINDOW
Xmin=44
Xmax=112
Xscl=4
Ymin=9.5
Ymax=10.6
Yscl=1
↓Xres=1
    
```



De vergelijking is $y = -0,010x + 10,833$.)

6. Wat kun je afleiden uit het feit dat de richtingscoëfficiënt in het mannenmodel in absolute waarde kleiner is dan die in het vrouwenmodel? Komt er een tijd dat de winnaar bij de vrouwen sneller de 100 meter loopt dan de winnaar bij de mannen? Wanneer zal dat het geval zijn?

(De vrouwen maken sneller vooruitgang dan de mannen: bij de vrouwen gaat er per editie 6,4 honderdsten van een seconde af en bij de mannen slechts 4,0. Je kunt narekenen dat de twee rechten elkaar snijden in het punt (246,7; 8,37). Als de huidige trend zich doorzet, zou op de Olympische Spelen van 2148 de winnares bij de vrouwen sneller lopen dan de winnaar bij de mannen. Dat is echter een erg gewaagde voorspelling. Een eerste reden is dat de voorspelling over een erg verre toekomst gaat, terwijl het huidige tempo van verbetering van de tijden wellicht niet lang vol te houden is. Het domein van het eerstegraadsmodel is dus beperkt. Een tweede reden is dat andere keuzes voor de eerstegraadsmodellen een heel ander resultaat opleveren. Dat kun je de leerlingen best zelf eens laten uitrekenen. De rechte bepaald door het tweede (1952) en het dertiende punt (1996), met vergelijking $y = -0.013x + 11,062$, geeft ook een goed model voor de tijden van mannen. Volgens dit model verbetert de mannentijd elke editie met 5,2 (i.p.v. 4,0) honderdsten van een seconde. Voor voorspellingen op korte termijn maakt dat weinig verschil. Voor de lange termijn is de invloed daarentegen erg groot: de vrouwen moeten nu 172 jaar langer geduld hebben. Een kleine verandering in de waarde van de richtingscoëfficiënt heeft dus grote gevolgen!)



3. Bierkragen modelleren met exponentiële functies

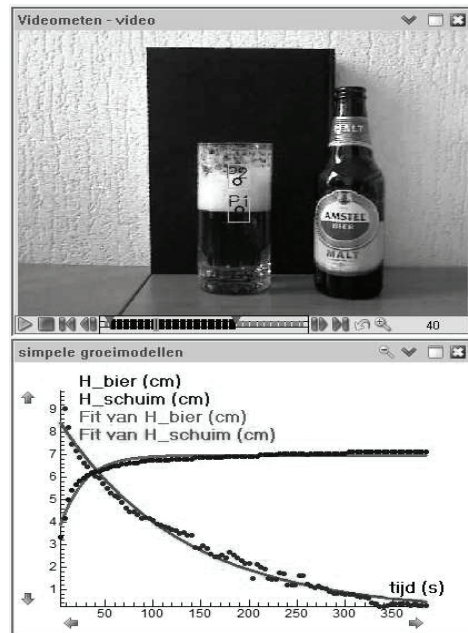
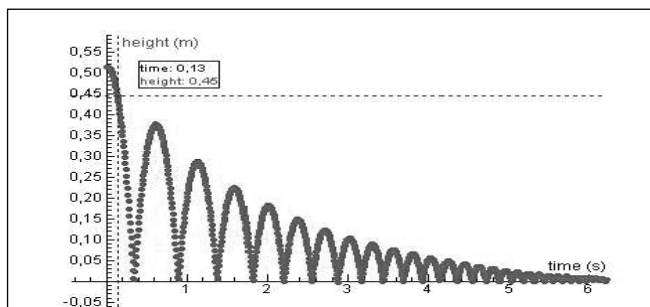
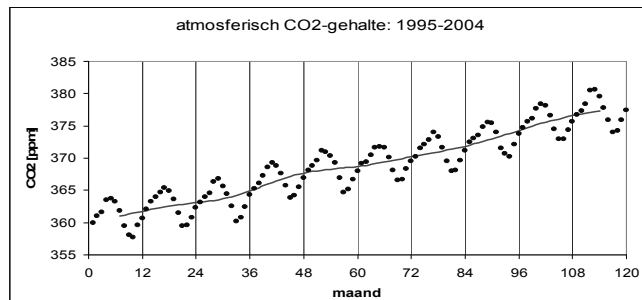
Som van meerdere voorschriften of meervoudig voorschrift?

Datasets die je van het internet haalt, geven zelden aanleiding tot grafieken die aansluiten bij een ‘zuivere’ functie uit de wiskundeles. Soms kun je wel meetwaarden behoorlijk modelleren met een som van twee of drie gekende functies. Soms echter is het handiger om te werken met een *meervoudig functievoorschrift*. In deze paragraaf onderzoeken we de voor- en nadelen van beide technieken. We starten met het overlopen van enkele geschikte contexten waarin dit onderzoek kan gebeuren.

In [6] vonden we een uitgewerkte les, die gebruikt maakt van de op wereldschaal langst bijgehouden meting van CO₂-concentraties in de lucht. Deze metingen werden gedaan op Mauna Lao, een vulkanische berg op het eiland Hawaï. Ze gaan terug tot 1958 (voor de waarden tussen 1995 en 2004 zie figuur linksboven op de volgende bladzijde). Als je alle beschikbare gegevens vanaf 1958 in beeld zou brengen, zou je een duidelijk lineaire stijgende trendlijn met een seizoensgebonden schommeling kunnen waarnemen. De leerlingen krijgen de opdracht om een modellering van dit proces te maken met een som van een eerstegraadsfunctie en een algemene sinusfunctie.

In [4] beschrijft D. Ramboer de klassieke toepassing van de stuiterende bal. Met een CBL (Calculator Based Laboratory) gekoppeld aan je grafische zakrekenmachine kun je de hoogten van een botsende bal opmeten (zie figuur linksonder op de volgende bladzijde). Bij deze proef moeten de leerlingen een *meervoudig voorschrift* vinden voor de stuiterende grafiek. Omdat tussen elke twee botsmomenten alleen de zwaartekracht op de bal inwerkt, kan de grafiek benaderd worden door een aaneenschakeling van paraboolsegmenten. Eventueel kun je hier ter vergelijking onderzoeken hoe goed de benadering is

met als voorschrift de absolute waarde van een gedempte sinusfunctie. De dempingsfunctie vind je door een exponentiële regressie te doen van de topwaarden van de stuiterende bal.



Een derde voorbeeld van modelleren van fysische fenomenen vonden we in [2]. André Heck, onderzoeker aan de universiteit van Amsterdam, publiceerde in dit artikel een analyse van zijn videometingen van de afnemende schuimkraag na het uitschenken van een glas bier. We werken in deze loop een klein onderdeel van dit onderzoek uit.

Om de verschillende fasen in het ontstaan van de schuimkraag te observeren, schenken we in de klas een glas bier uit. Dit deel van het experiment kunnen we niet achterwege laten. Het videometen echter zien we niet als een noodzakelijk onderdeel van het leerproces. Uiteraard kan het een meerwaarde zijn wanneer de leerkracht zich groepen voelt om deze technische hoogstandjes in de klas te halen. Maar door een screenshot te tonen van de proefopstelling (zie rechtse figuur hierboven), zijn de leerlingen waarschijnlijk ook overtuigd van de realiteitswaarde van deze meting.

De modelleringsopdracht hieronder is heel open geformuleerd. Dit betekent dat de leerlingen de keuze hebben of ze een *samengesteld voorschrift* (ook wel *stuksgewijs gedefinieerd voorschrift*) of een *som van enkelvoudige functievoorschriften* gebruiken. In beide gevallen komt het er op neer dat de leerlingen een combinatie maken van twee exponentiële functies waarvan het voorschrift gevonden wordt door 'exponentiële regressie'. We noemen de benaderende functie daarom bi-exponentieel.

Situatieschets en werktekst

Elke bierdrinker kent het fenomeen: bij het inschenken van bier in een glas vormt zich een schuimkraag die na verloop van tijd, wanneer het glas onaangeroerd blijft, verdwijnt. De perceptie van wat een goede bierkraag is, verschilt van persoon tot persoon en van regio tot regio en leidt tot veel discussies onder bierdrinkers. Genoeg redenen voor bierbrouwers om te onderzoeken hoe ze hun klanten tevreden kunnen stellen met een fraaie, niet overmatige, stabiele bierkraag. Bij wijze van inleiding schenkt de leerkracht zich een glas bier in en bespreekt hij de aantrekkelijkheid van de bierkraag.

Volgens de studie van Lewis en Bamforth [3] kan de vorming van een bierkraag in vijf onderdelen opgesplitst worden. De leerlingen kijken toe terwijl de leerkracht het glas bier gedisciplineerd onaangeroerd laat. Ze proberen ondertussen de volgende fasen te onderscheiden.

1. *Bellenvorming*. Bier is bij een temperatuur van 4°C of hoger een oververzadigde oplossing van kooldioxide. Dit gas borrelt op vanaf het moment van uitschenken.
2. *Schuimvorming*. Gasbellen die aan de oppervlakte komen, vormen een schuimkraag. De hoogte van deze kraag wordt vooral bepaald door de manier van inschenken, de temperatuur en de viscositeit (of stroperigheid) van het bier maar ook door de vorm van het bierglas en de zuiverheid van het glasoppervlak.
3. *Drainage*. Ook nog na het inschenken zal onder invloed van de zwaartekracht een neerwaartse stroom van bier door het luchtige schuim te zien zijn.
4. *Disproportionering*. De concentratie van proteïnen in het schuim neemt toe. Er ontsnapt gas door de celwand van kleinere cellen naar grotere. Door het toenemen van het aantal grotere cellen wordt het schuim instabiel en zakt het in.
5. *Boordsefvorming*. Op het einde van het proces zal de hele schuimkraag verdwenen zijn. Alleen aan de wand van het glas blijft een beetje bierschuim vastkleven.

Vervolgens krijgen de leerlingen een vereenvoudigde set meetwaarden die afkomstig is van een digitale videometing. Daarop baseren ze zich tijdens de modelleerfase. Tussendoor moeten ze ook de link proberen te leggen met enkele van de hierboven beschreven fasen in het schuimproces.

Modelleren van bierhoogte met een exponentieel voorschrift

Een glas bier wordt nogal onhandig ingeschonken. Vlak na het inschenken is de bierhoogte iets meer dan 9 cm en de schuimhoogte iets meer dan 6 cm. De eerste slok kan best nog even op zich laten wachten.

Hieronder zie je meetwaarden, genomen door een programma voor videometing dat elke 10 seconden een meting doet. We vermelden enkel de hoogte van het bier zonder kraag, uitgedrukt in cm. Na deze observatie van vijf minuten is het proces nog niet helemaal ten einde. De bierhoogte zal nadien nog lichtjes stijgen tot 13,20 cm.

<i>t</i>	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
<i>h(t)</i>	9,58	10,6	11,3	11,77	12,11	12,25	12,51	12,63	12,73	12,8
<i>t</i>	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
<i>h(t)</i>	12,85	12,9	12,94	12,96	12,99	13,01	13,03	13,05	13,06	13,08
<i>t</i>	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
<i>h(t)</i>	13,09	13,1	13,11	13,12	13,13	13,13	13,14	13,15	13,15	13,16

Zet deze getallen in de lijsten L_1 en L_2 van je zakrekenmachine. Maak een statistische plot met L_1 op de horizontale as en L_2 op de verticale as.

Voer een geschikte regressie uit op deze waarden. Teken daarna de grafiek van de gevonden functie doorheen het scatterdiagram. Beoordeel het resultaat.

Het zou overmoedig zijn te denken dat je meteen een goede regressie kunt vinden voor een complex chemisch en fysisch proces als dat van de bierkraag. Meestal zijn er voor dergelijke

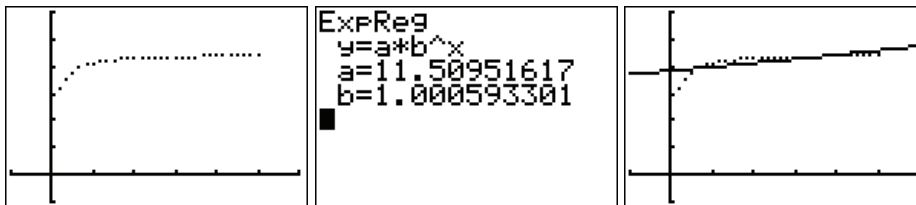
modelleringen bijkomende manipulaties nodig. De kans is dus groot dat je niet tevreden bent van je regressie. In dat geval kun je:

- een ander regressiemodel kiezen of
- een geschikte transformatie uitvoeren op de meetwaarden of
- een meervoudig functievoorschrift zoeken of
- op zoek gaan naar een som van meerdere regressiefuncties.

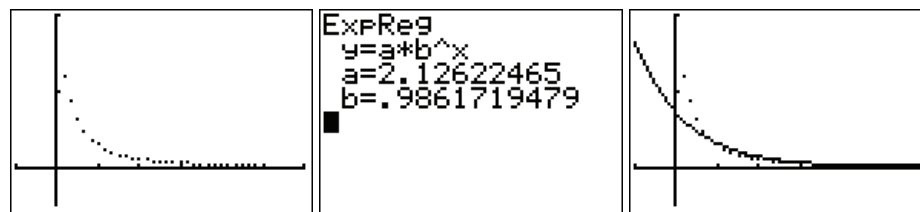
Indien je de leerlingen in groepjes aan deze taak laat werken, loop je het risico dat je ettelijke keren dezelfde aanwijzingen en opmerkingen moet maken. Daarom lijkt het ons beter de opdrachten op te lossen in een onderwijsleergesprek. De antwoorden hieronder zijn enkel bedoeld als leidraad voor de leerkracht.

De keuze van het regressiemodel

Bij het kiezen van een regressiemodel, kun je je laten leiden door de suggestie van een horizontale asymptoot in het scatterdiagram. De grafische zakrekenmachine biedt slechts twee gekende regressiefuncties aan met een horizontale asymptoot naar plus oneindig: de powerregressie, $f(x) = a \cdot x^b$ met b negatief, en de exponentiële regressie, $f(x) = a \cdot b^x$ met b kleiner dan 1. De powerregressie lijkt niet meteen een goede keuze vanwege de verticale asymptoot voor $x = 0$. De exponentiële regressie moet ook met de nodige omzichtigheid gehanteerd worden. Het scatterdiagram van de bierhoogte gaat immers asymptotisch naar de waarde 13,2 terwijl de grafiek van $f(x) = a \cdot b^x$ met b kleiner dan 1 asymptotisch naar 0 gaat. Hieronder zie je een ondoordachte poging om het gegeven scatterdiagram te benaderen met een exponentiële regressiegrafiek: de grafische zakrekenmachine heeft niet eens het besef de groefactor b kleiner dan 1 te kiezen.

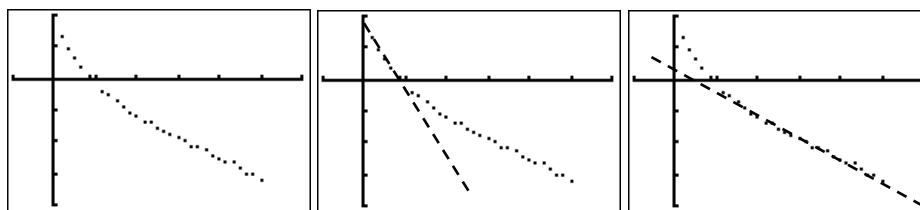


In de werktekst werd o.a. voorgesteld de gegevens in geval van nood te transformeren. Om deze gegevens te transformeren zo dat de beeldwaarden asymptotisch naar nul gaan, kunnen leerlingen denken aan een verschuiving over 13,2 eenheden naar omlaag. Maar dan zijn de functiewaarden negatief terwijl een exponentiële functie van de vorm $f(x) = a \cdot b^x$ enkel positieve functiewaarden heeft. Er moet dus nog gespiegeld worden rond de x -as. Hetzelfde resultaat wordt verkregen door in plaats van eerst te verschuiven en dan te spiegelen, enkel één keer te spiegelen rond de horizontale rechte met vergelijking $y = 6,6$. Er is bijgevolg een nieuwe lijst nodig. Deze nieuwe lijst, $L_3 = 13,2 - L_2$, geeft de ‘groeimogelijkheid’ van de bierhoogte. Ook na deze transformatie is het nog niet duidelijk of het gekozen regressiemodel goed is: de stipjes hieronder zijn erg slordig rond de grafiek uitgestrooid. Alleen in het interval $[60, 300]$ lijkt de regressielijn min of meer aan te sluiten bij de stippen.



Logaritmisch of niet logaritmisch?

Eventueel kan de leerkracht hier klassikaal een techniek aanbrenen om te onderzoeken of het exponentiële regressiemodel bruikbaar is. Deze truc houdt in dat we de ln-waarden van de getallen in L_3 opslaan in een nieuwe lijst L_4 . De statistische plot van L_4 ten opzichte van L_1 geeft een antwoord op de vraag of het exponentiële regressiemodel geschikt is. Het scatterdiagram van L_4 ten opzichte van L_1 ziet er uit als een geknikte lijn (zie linkse grafiek hieronder). Je kunt een lineair voorschrift vinden voor $x \in [0,60]$ (zie middelste grafiek) en een ander lineair voorschrift voor $x \in [60,300]$ (zie rechtse grafiek). Welke conclusie zou je uit deze vaststelling kunnen trekken?



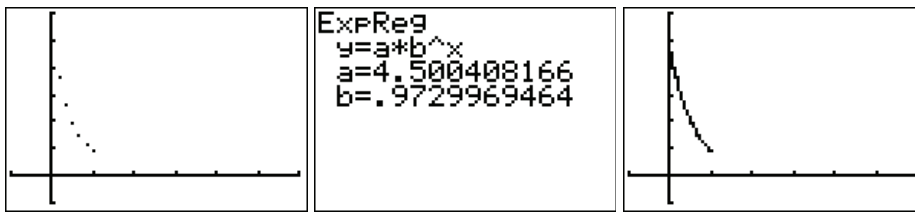
Wel, indien de waarden van L_3 de beelden zijn van getallen uit L_1 door een exponentiële functie van de vorm $f(x) = a \cdot b^x$ dan zijn de waarden van L_4 de beelden van de getallen uit L_1 door een lineaire functie van de vorm $g(x) = \ln(a) + x \cdot \ln(b)$. Indien je in de grafiek van L_4 ten opzichte van L_1 echter twee lineaire functies onderscheidt, dan zul je de grafiek van L_3 ten opzichte van L_1 moeten modelleren met twee exponentiële functies. De grafiek van L_3 ten opzichte van L_1 is met andere woorden bi-exponentieel.

Je kunt je de vraag stellen op welk tijdstip in het schuimkraagproces de overgang tussen de twee exponentiële functies zich voordoet. Uit de voorgaande grafieken blijkt duidelijk dat de overgang plaatsvindt na ongeveer één minuut. In het interval $[0,60]$ is er een snelle daling van de schuimkraag te zien. In het interval $[60,300]$ stellen we een trage daling vast. Deze twee daalsnelheden kunnen gelinkt worden aan respectievelijk het ‘drainageproces’ en aan het ‘disproportioneringsproces’.

Een functie met meervoudig voorschrift

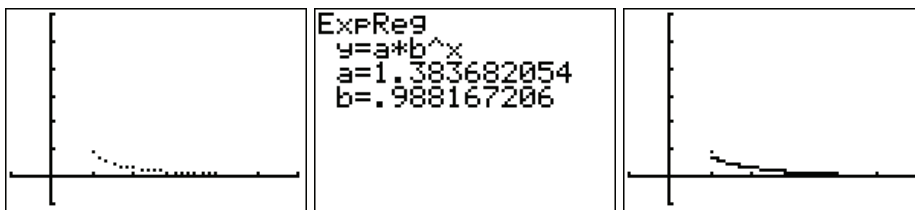
Het onderzoek hierboven heeft de leerlingen wellicht overtuigd een regressiefunctie met een tweevoudig voorschrift te gebruiken. Via een exponentiële regressie op de waarden uit het interval $[0,60]$ stellen ze de drainagefunctie op. Het voorschrift van deze functie, in TI-84-notatie, is

$$Y_1=4.5004*0.9730^X \quad (0 < X \text{ and } X < 60).$$



Daarna zoeken de leerlingen een functie voor het disproportioneeringsproces. Hiervoor maken ze een exponentiële regressie op de waarden uit het interval $[60, 300]$. Het voorschrift van deze functie is

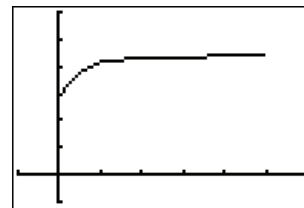
$$Y_2 = 1.3837 \cdot 0.9882^x \quad (60 < X \text{ and } X < 300).$$



Beide grafieken lijken goede benaderingen voor het stippendiagram te zijn. Als je nauwkeurig toekijkt merk je echter een klein sprongetje bij de 'aansluiting'. Om een meervoudig voorschrift te vinden voor de bierhoogte, moet er nog rekening gehouden worden met de spiegeling rond de rechte $y = 6,6$:

$$Y_3 = (13.2 - 4.5002 \cdot 0.9730^x) \quad (0 < X \text{ and } X < 60)$$

$$Y_4 = (13.2 - 1.3837 \cdot 0.9882^x) \quad (60 < X \text{ and } X < 300)$$

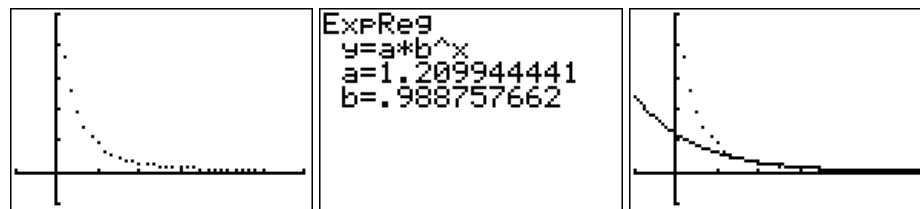


Een som van meerdere functies

Iets moeilijker wordt het indien je één globaal functievoorschrift probeert te vinden, dat bij alle meetwaarden aansluit. In dit geval dringt een som van twee exponentiële functies, $f(x) = a \cdot b^x + c \cdot d^x$, zich op. Een klassieke techniek om de functies $f_1(x) = a \cdot b^x$ en $f_2(x) = c \cdot d^x$ op te sporen is de *afpelmethode* (*function peeling* of *curve stripping*). De afpelmethode bestaat er in dat men eerst een regressie doet op alle meetwaarden uit een karakteristiek gedeelte van de grafiek, bijvoorbeeld de asymptotische staart. Dit levert de functie $f_1(x) = a \cdot b^x$ op. De grafiek van deze regressiefunctie sluit uiteraard alleen maar goed aan bij het scatterdiagram in dit kenmerkende gedeelte. Elders kunnen er grote fouten optreden. Vervolgens maakt men een scatterdiagram van alle foutwaarden. Op deze foutwaarden wordt een nieuwe regressie uitgevoerd. Dit levert de functie $f_2(x) = c \cdot d^x$ op. Als deze tweede regressie visueel doeltreffend blijkt te zijn, kunnen we ophouden met het afpelproces. De som van de twee regressiefuncties is dan een goede benadering voor de oorspronkelijke meetwaarden. Het is bekend dat de afpelmethode niet voor elke type van functies even efficiënt is. Soms moet het regressieproces ook nog een derde of een vierde keer herhaald worden. We onderzoeken hieronder of het afpellen van de functievoorschriften zinvol is bij deze toepassing.

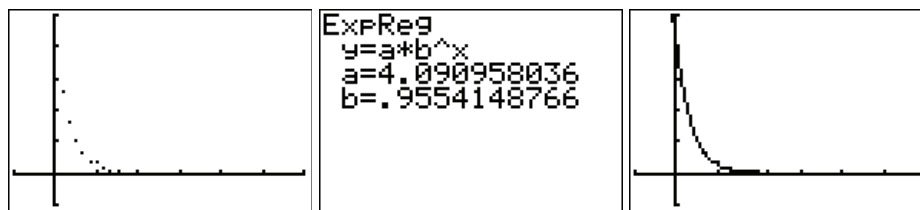
De staart van het scatterdiagram begint vanaf de zesde stip. Om veilig te spelen mag je deze keuze oordeelkundig verhogen bijvoorbeeld tot acht. We vinden dan de volgende regressiefunctie:

$$Y_1 = 1.2099 * 0.9888^x.$$



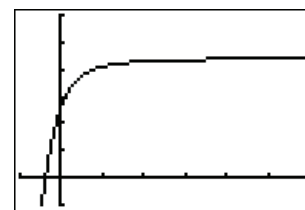
De eerste zeven stippen liggen ver naast de grafiek. Een regressie op alle foutwaarden, levert het volgende voorschrift op:

$$Y_2 = 4.0910 * 0.9554^x.$$



Ditmaal liggen alle stippen op de regressielijn. Dit betekent dat het afpelproces ten einde is. We vinden, rekening houdend met de spiegelende transformatie aan het begin, het volgende voorschrift:

$$Y_3 = 13.2 - 1.2099 * 0.9888^x - 4.0910 * 0.9554^x$$



Vergelijking van modellen

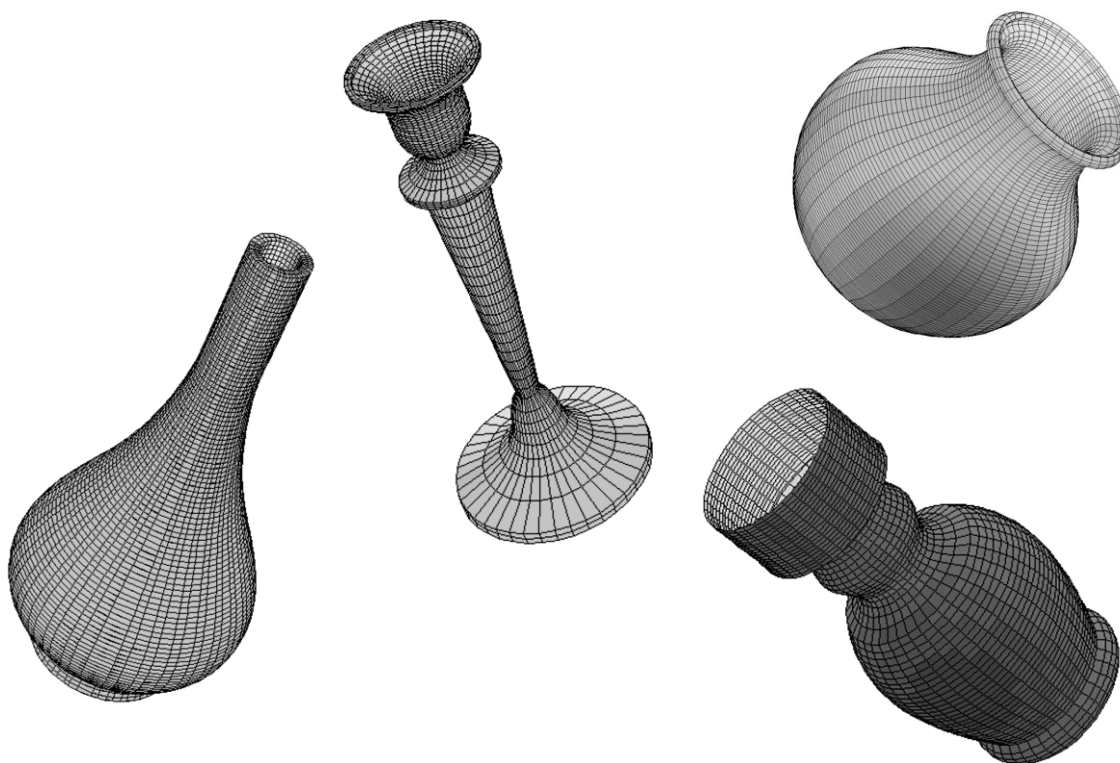
Beide benaderingsmethoden lijken visueel even nauwkeurig te zijn. Om een goede nauwkeurigheid te bereiken, moet er soms wat geëxperimenteerd worden met de overgangsgrens tussen de fase van 'snelle daling' en de fase van 'trage daling'. Naargelang de grens die gebruikt is, krijgen we een andere benaderingsfunctie.

De methode van het *samengestelde voorschrift* heeft het voordeel van wiskundig eenvoudig te zijn. Het samengestelde functievoorschrift is echter iets omslachtiger om in te tikken. De gevonden grafiek maakt een kleine sprong in het overgangspunt. In vergelijking met het natuurlijke proces is dit storend. Ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn verspringt plots in dit punt.

De afpelmethode is veel minder bekend bij leerlingen. Ze geeft niet altijd een goed resultaat. Maar in deze toepassing is de modellering met een *som van twee functies* zeer bevredigend. De gevonden functie heeft het voordeel afleidbaar te zijn. In tegenstelling tot de functie met het dubbele voorschrift, heeft deze functie geen knik en ook geen discontinuïteit in de grafiek.

4. Flessen modelleren met veeltermfuncties

Deze modelleeropdracht is iets omvangrijker dan de vorige. Ze bestaat uit twee delen: een modellering van een *ruimtelijk lichaam* en een modellering van een *fysische toepassing*. De eerste opdracht kan afzonderlijk van de laatste uitgevoerd worden. Alleen de tweede opdracht uitvoeren, kan niet: ze steunt op de eerste. Voor dit onderzoek moeten de leerlingen vertrouwd zijn met het onderwerp integralen. Dit project past dus in een zesde jaar. Het is het meest geschikt voor leerlingen uit een richting met de component wetenschappen.



Voor de *ruimtelijke modelleeropdracht* moeten de leerlingen een rotatiesymmetrische fles mee naar de les brengen, liefst een met aantrekkelijke welvingen en met zo weinig mogelijk cilindrische gedeelten. Ook andere rotatiesymmetrische objecten komen voor deze designopdracht in aanmerking: een vaas, een olielamp, een pepermolen, een kandelaar of een gedraaide zuil van een trapleuning. Maar als het voorwerp niet met een vloeistof kan gevuld worden, is het niet geschikt voor het vervolgproject. Het doel van de eerste modelleeropdracht is om de gekozen fles zo getrouw mogelijk op het computerscherm na te bootsen via parametervergelijkingen en er daarna de oppervlakte van te bepalen via een integraalberekening. De leerlingen mogen zich voor hun design beperken tot rudimentaire vormstructuren. Maar vaak hebben ze er plezier in om een ontwerp te maken met meer detail. Dit wordt uiteraard geapprecieerd. Complexiteit mag echter niet ten koste gaan van de wiskundige hanteerbaarheid van het model.

Daarna laten we de leerlingen een *fysische toepassing modelleren*. Eerder werden in de klas formules afgeleid voor de booglengte van een kromme, de inhoud en de oppervlakte van een omwentelingslichaam, de arbeid om een veer uit te rekken of een tuinslang van een haspel te rollen ... Het principe achter de integraalformules (verdelen van het ruimtelichaam in fijne plakjes, sommeren van oneindig veel oneindig kleine grootheden, ...) is dus gekend. Tot voor kort dacht ik dat het zelfstandig uitdenken van nieuwe integraalformules niet voor leerlingen was weggelegd. Mijn idee

hierover is veranderd. Leerlingen uit wiskundig sterke richtingen zijn best in staat om zelf een formule te bedenken waarmee ze bijvoorbeeld de minimale arbeid kunnen berekenen om deze fles langs boven met een slangetje leeg te pompen of ze met een rietje leeg te drinken. Met ‘minimaal’ bedoelen we dat we geen rekening houden met de wrijving en dat het rietje niet langer is dan strikt nodig. Uiteraard verlangen we dat de fles in verticale positie blijft staan. Want indien we ze mogen kantelen of brutaalweg omstoten, zou de geleverde arbeid om de fles te ledigen zelfs verwaarloosbaar klein kunnen zijn. Een gaatje in de bodem van de fles boren om ze leeg te maken, is ook niet toegestaan.

In de volgende werktekst laten we de leerlingen de vergelijkingen zoeken van een fles, die ze voor dit project meer naar de les brengen. Aangezien de opdrachten hieronder nogal open geformuleerd zijn, kunnen de antwoorden ook ver uit elkaar liggen. Het is daarom vrij moeilijk algemene richtlijnen te geven voor de verwerking van de opdrachten. Onze suggestie moet eerder gezien worden als ‘een’ mogelijke invalshoek. Voor de digitale uitwerking van dit project kozen wij voor het programma Derive maar je kunt ook gebruik maken van: VisuMath, Winplot, Microsoft Mathematics ... Het importeren van de foto van de fles deden we in Cabri maar dit zou je evengoed kunnen doen met een freewareprogramma als Geogebra.

Het design van een rotatiesymmetrische fles

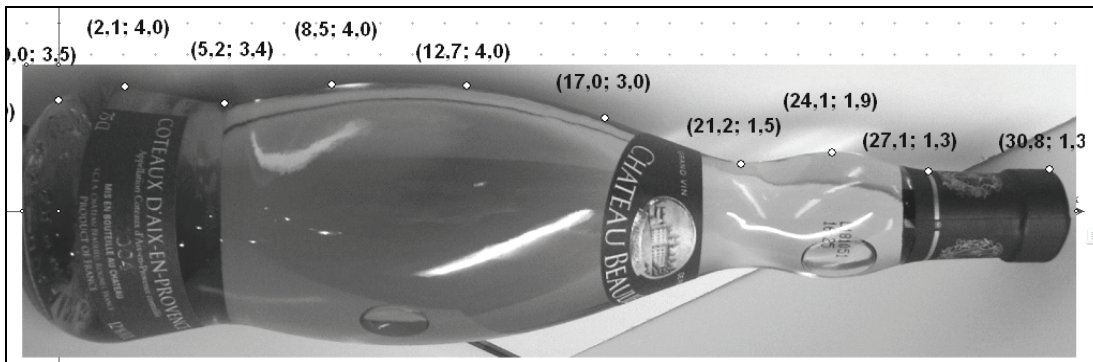
In dit project draait alles rond flessen: geen hoekige maar rotatiesymmetrische flessen. Voor deze opdracht moet je een mooi golvende fles mee naar de les brengen. Let erop dat de fles zo weinig mogelijk cilindrische delen bevat. We zullen immers proberen de golfing van de fles na te bootsen met grafieken van (niet constante) veeltermfuncties. Dit soort grafieken is het makkelijkste in ronde vormen te kneden, maar cilindrische stukken zijn er moeilijk mee te beschrijven. Je vindt waarschijnlijk de mooiste vormen bij de roséflessen, de olijfolieflessen en de iets duurdere waterflessen. De meeste wijnflessen zijn te cilindrisch, de meeste likeurflessen zijn vierkant of platgedrukt ovaal.

Neem een digitale foto van je fles in horizontale stand. Je kunt de fles best tegen een contrasterende achtergrond fotograferen. Vooral de profiellijn moet goed zichtbaar zijn. Dit is nodig omdat we de vergelijking van de profiellijn en de driedimensionale vergelijking van de mantel van de fles gaan bepalen. Om een sterke perspectieffervorming te vermijden (op de foto hieronder zijn grond- en bovenzvlak jammer genoeg niet echt evenwijdig) fotografeer je beter van wat verder en met een zoom. Het is absoluut noodzakelijk dat je de lengte-breedte-verhouding bij het importeren van de foto ongewijzigd laat. Anders raak je later in de knoei met lengtematen.



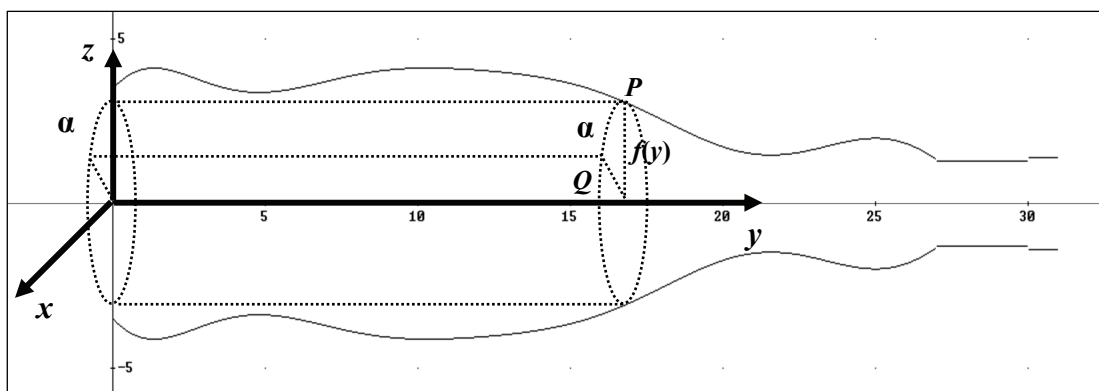
Om de vergelijking van de profiellijn van de fles te vinden importeer je de foto van de fles in Cabri-II-Plus of in Geogebra. Je moet er over waken dat de rechthoek waarin je de fles opneemt de juiste afmetingen heeft. De symmetrieas van de fles moet op de x -as belanden, de bodem van de fles liefst op de y -as, de opening van de fles wijst bij voorkeur naar rechts.

Vervolgens zet je een aantal punten op de profiellijn van de fles. Zet ze bij voorkeur in de buurt van plaatsen waar de grafiek een typische wending krijgt. Voorbij de bodem van de fles en voorbij de hals van de fles leg je telkens nog minstens één punt, zo dat de natuurlijke kromming van de fles hier nog eventjes doorgetrokken wordt. Let op dat je de punten min of meer gelijkmatig verspreid over de bovenlijn en dat je het aantal punten niet al te groot neemt. Net zoals een tweedegraadskromme (parabool) bepaald wordt door drie punten, moet je voor een n -de graadskromme een beroep doen op $n+1$ punten. Indien je bijvoorbeeld twaalf punten kiest, ga je op zoek naar een elfdegraadskromme.



1. Zoek een programma op het internet waarmee je de ‘best passende grafiek’ of de ‘best fitting curve’ kunt vinden bij de afgelezen punten. Als je de keuze hebt tussen verschillende types van functies, kies je voor ‘veeltermfuncties’ of ‘polynomial functions’. Misschien moet je de bovenlijn van de fles in verschillende delen opsplitsen: de buik, de hals, de dop. Dat is vaak eenvoudiger. Maak in een programma naar keuze een grafiek van de gevonden functies en hun spiegelbeelden ten opzichte van de x -as. Zo kun je zien of je benadering van je fles bevredigend is. Indien de vormgeving je goedkeuring niet wegdraagt, begin je best opnieuw met een andere set van punten.

De mantel van een driedimensionale fles ontstaat door de tweedimensionale grafiek, die hierboven gevonden werd, te wentelen om de x -as (zie onderstaande tekening). Elk punt P op deze grafiek beschrijft een cirkel, die we ‘breedtecirkel’ noemen. De kromme die we verkrijgen door de oorspronkelijke grafiek over een hoek α te wentelen noemen we een ‘meridiaan’. Misschien merk je nu op dat de breedtecirkels en de meridianen in andere richtingen lopen dan die op de aardbol. Juist, dit komt omdat we de fles over 90° gedraaid hebben ten opzichte van de verticale stand.

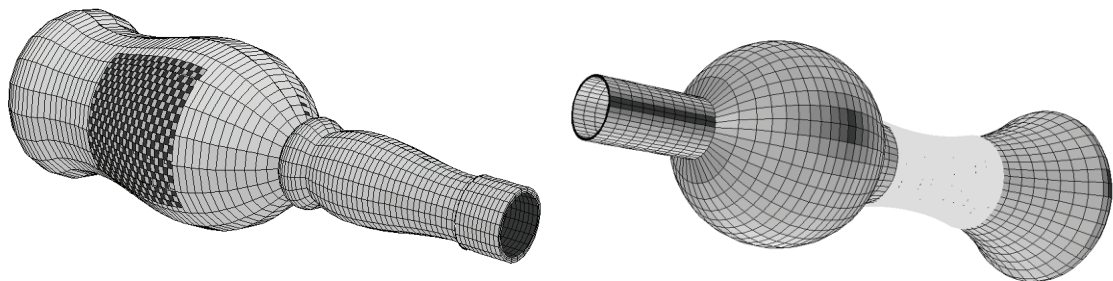


Om driedimensionaal te kunnen werken, moeten we drie onderling loodrechte assen vastleggen. Traditioneel nemen we de nieuwe x -as uit het blad gericht naar de lezer toe. De

nieuwe y -as wordt op de oude x -as gelegd en de z -as op de oude y -as. Uit de tekening hierboven kunnen we de driedimensionale coördinaten aflezen van een punt Q dat ontstaat door een punt P van de grafiek te roteren over een hoek α rond de nieuwe y -as (de oude x -as). De coördinaten van dit punt Q hangen af van twee parameters: de breedtegraad y en de rotatiehoek α .

2. Zoek een uitdrukking voor de coördinaten van een willekeurig punt Q van de fles in functie van de parameters y en α . Geef ook duidelijk aan in welke intervallen deze parameters variëren. Zoek op het internet een programma dat grafieken van parameterfuncties kan tekenen in een driedimensionaal assenstelsel. Teken hierin de verschillende onderdelen van je fles.

Waarschijnlijk vind je dat je fles er ver van echt uitziet. Wat er nog ontbreekt om bruikbaar te zijn, is een bodem. Wat er nog ontbreekt om realistisch te zijn, is de glasdikte. En wat er nog aan ontbreekt om mooi te zijn, is een etiket.



3. Zoek een uitdrukking voor de coördinaten van een willekeurig punt Q van de bodem van de fles in functie van de parameters r en α . Zoals hierboven is α de variabele draaihoek. De parameter r is de variabele afstand van Q tot de rotatieas. Voeg daarna de grafiek van de bodem toe aan je ontwerp.
4. De glasdikte van de fles kan gesimuleerd worden door een binnenfles te tekenen. De parametervergelijking van de binnenfles haal je snel uit de parametervergelijking van de gewone fles. Vergeet de binnenfles en de buitenfles niet aan elkaar te koppelen door middel van een klein ringetje aan het uiteinde van de fles. De parametervergelijking van dit ringetje stel je analoog op aan de parametervergelijking van de bodem.
5. En tot slot ontwerp je een etiket voor de flesmantel. Dit etiket heeft dezelfde parametervergelijking als de mantel van de buitenfles. Alleen moet je het bereik van de beide parameters drastisch inperken.

Indien je de profiellijn van een bochtige fles in zijn geheel wil ‘fitten’ heb je waarschijnlijk verschillende pogingen nodig. Praktisch gezien is het beter om de profiellijn in verschillende delen op te splitsen. Dit is vooral nodig wanneer er constante functies of geknikte functies aan te pas komen. In Derive kun je de grafiek van een functie $f(x)$ afknotten over het interval $[a, b]$ door het voorschrift te delen door de afknottingsfunctie $chi(a, x, b)$. De chi -functie is 1 tussen de waarden a en b en 0 elders.

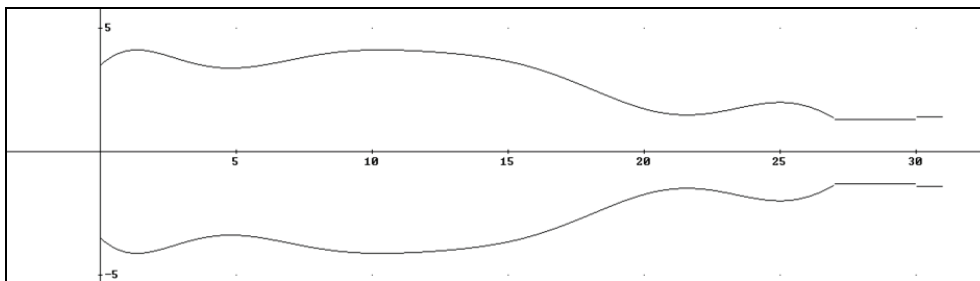
```

#1: FIT
      x  11  10  9  8  7  6  5  4  3  2
      a·x + b·x + c·x + d·x + e·x + i·x + j·x + k·x + l·x + m·x + p·x + q
      -2
      0
      2.1
      5.2
      8.5
      12.7
      17
      21.2
      24.1
      27.1
      30
      33
      2
      3.5
      4
      3.4
      4
      4
      1.5
      1.9
      1.3
      1.3
      1.5

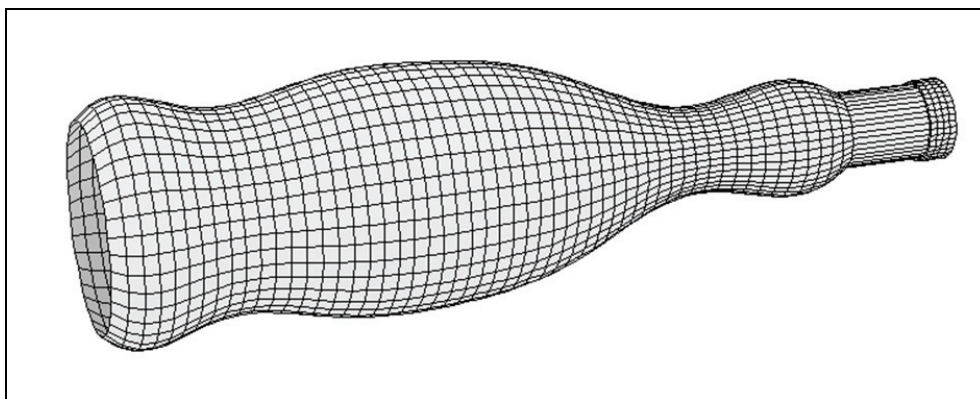
#2: f(x) :=
      -12 11      -9 10      -7 9      -6 8      -5 7      6      5      4      3      2
      -9.18·10-10·x + 1.49·10-10·x - 1.04·10-10·x + 4·10-10·x - 9.38·10-10·x + 0·x - 0.01·x + 0.06·x - 0.07·x - 0.36·x + 0.97·x + 3.5
      CHI(0, x, 27)

#3: g(x) :=
      1.3
      CHI(27, x, 30)

#4: h(x) :=
      1.4
      CHI(30, x, 31)
    
```



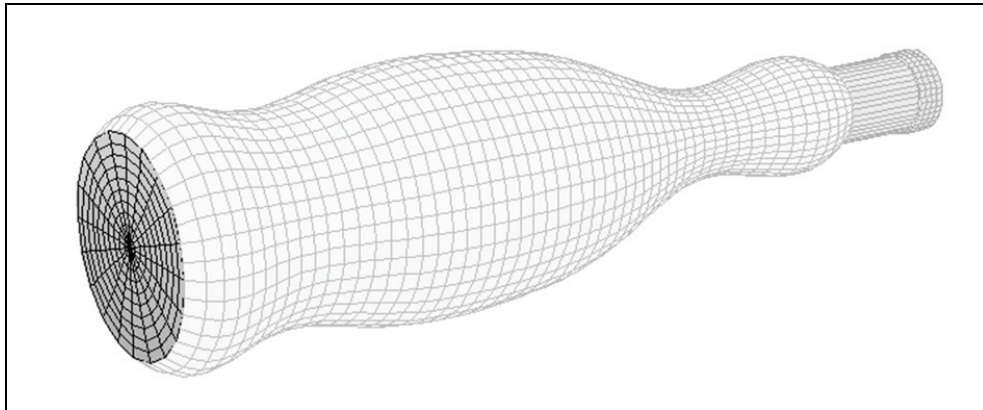
Een willekeurig punt Q van het manteloppervlak van de fles kan vastgelegd worden door middel van de cartesiaanse coördinaten $(f(y) \cdot \sin \alpha, y, f(y) \cdot \cos \alpha)$. Het hele oppervlak is gedefinieerd wanneer ook de intervallen waarin de parameters zich bevinden, vastgelegd zijn. Voor een volledige omwenteling van de mantelkromme hierboven geldt dat $\alpha \in [0, 2\pi]$ en dat $y \in [0, 27]$. De hals en de dop van de fles zou je kunnen vastleggen door de grafieken van twee constante functies een volledige omwenteling te laten maken voor $y \in [27, 30]$ en $y \in [30, 31]$.



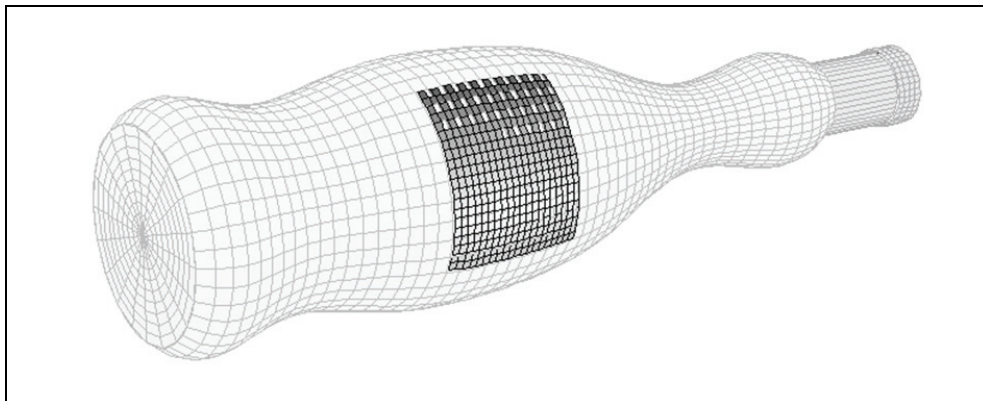
Aan dit basismodel kun je naar believen accessoires toevoegen. Als je bijvoorbeeld een glasdikte van 0,3 cm wil modelleren, kun je een binnenfles ‘evenwijdig’ met de buitenfles tekenen met parametervoorstelling $((f(y) - 0,3) \cdot \sin \alpha; y; (f(y) - 0,3) \cdot \cos \alpha)$. De parameters y en α doorlopen dezelfde intervallen als bij de buitenfles. Voor de bodem van de fles nemen we een schijf met als

straal 3,5 cm. Deze schijf omschrijven we door $(r \sin \alpha, 0, r \cos \alpha)$ waarbij de parameter r in dit geval in het interval $[0; 3,5]$ ligt en de draaihoek α in het interval $[0, 2\pi]$. Als de fles een ziel heeft (deuk in de bodem) dan wordt het moeilijker.

Evenwijdig met deze bodemschijf kunnen we ook een ringetje ontwerpen dat de binnen- en buitenfles verbindt bovenaan de hals. Hiervan is de parametervoorstelling $(r \sin \alpha, 31, r \cos \alpha)$ met $r \in [1,1; 1,4]$ en $\alpha \in [0, 2\pi]$. Met deze toevoegingen ziet de fles er heel wat realistischer uit ... zelfs wanneer je op de schenkopening zou inzoomen en digitaal naar binnen zou kruipen.



Helemaal tot slot klevden we een etiket met een kartondikte van 1mm op de fles. Het etiket heeft parametervoorstelling $((f(y)+0,1) \cdot \sin \alpha; y; (f(y)+0,1) \cdot \cos \alpha)$ met $y \in [9,14]$ en $\alpha \in [0,5; 2]$.



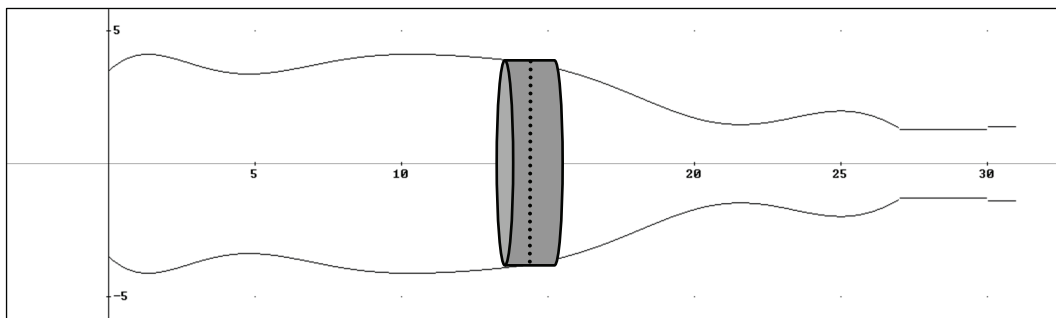
Arbeid om een fles met een rietje leeg te drinken

Hoeveel arbeid moet je verrichten om een cilindervormige literfles van 20 cm met een rietje leeg te drinken? Nooit over nagedacht? Je kunt deze grootheid echter makkelijk schatten. Indien het over een waterfles gaat, zal de vloeistof in de fles ongeveer 1 kg wegen. Deze kilogram water wordt door de aarde aangetrokken met een kracht van $1 \cdot 9,81$ N of pakweg 10 N. Stel bovendien dat de waterfles cilindervormig is. De gemiddelde afstand die een waterdruppel dan via het rietje moet overbruggen om bevrijd te worden uit de fles is 10 cm of

0,10 m. De arbeid die nodig is om met een kracht van 10 N een beweging van 0,10 m vol te houden is $10 \cdot 0,10$ of 1,0 J.

Via dit vergelijkingspunt kun je je niet alleen een arbeid van één Joule voorstellen maar ook een vermogen van één Watt. Indien je een fles van één liter water op één seconde met een rietje kunt leegdrinken, dan heb je het vermogen van één Watt ontwikkeld. Maar dit terzijde.

De arbeid die nodig is om de wijnfles uit de vorige werktekst met een rietje leeg te drinken of met een slangetje en een pomp leeg te zuigen is bijna het dubbele van de hierboven geschatte waarde. In deze werktekst proberen we de arbeid om een rotatiesymmetrische fles leeg te zuigen exact te berekenen. Toegegeven, de arbeid die je moet leveren is ongeveer gelijk aan nul wanneer je de slang ombuigt en ze als een hevel gebruikt. Maar dat is in deze opdracht verboden.

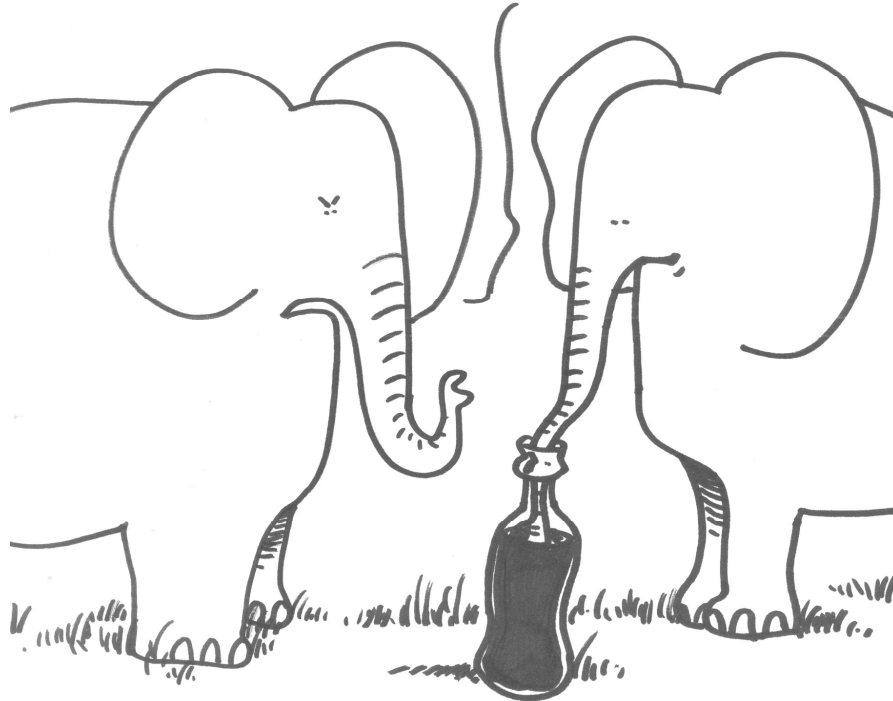


Een rotatiesymmetrische fles is gevuld met een vloeistof met een soortelijke massa van ρ kg/m^3 . Stel dat (een deel van) de profiellijn van een fles gemodelleerd is met een functievoorschrift $f(x)$ met $x \in [a, b]$. De fles is gevuld tot op een hoogte $x = c$. Net als in de vorige werktekst zijn alle lengtematen, x , $f(x)$, a , b en c , uitgedrukt in cm.

Je kunt de bijbehorende vloeistofinhoud nu verdelen in een groot aantal zeer platte schijven. De schijf op de bovenstaande tekening is gecentreerd rond een gegeven waarde x . Stel de hoogte van elke cilinderschijf gelijk aan de waarde Δx . Ook Δx wordt uitgedrukt in cm. Voor elk van deze schijven kun je via een berekening zoals hierboven de arbeid berekenen om ze via een rietje omhoog te zuigen tot op de hoogte van de rand van de fles.

1. Stel een formule op voor de inhoud (in m^3), voor de massa (in kg) en voor het gewicht (in N) van de afgebeelde schijf.
2. Over welke afstand moet deze schijf omhoog gepompt worden om over de rand te kunnen ontsnappen?
3. Welke arbeid is hier voor nodig?
4. Om de som te berekenen van oneindig veel oneindig kleine arbeidjes die nodig zijn om alle schijven omhoog te pompen, stellen we een integraal op. Druk deze integraal uit in functie van de gegevens $f(x)$, ρ , a , b en c . Uiteraard mag je ook de constanten π en g in je formule betrekken.
5. Bereken deze integraal met de gegevens uit je vorige werktekst. Je mag hiervoor een computerprogramma inschakelen.

GEBRUIK TOCH EEN RIETJE
ZOALS IEDEREEN !



Het volume ΔV van het cilindrisch volume-elementje op de tekening kan worden berekend uit de straal van het grondvlak, $f(x)$, en uit de hoogte, Δx . Voor de omzetting van de lengtematen van cm naar m mogen we niet vergeten een omzettingfactor in rekening brengen:

$$\Delta V = \frac{\pi}{10^6} \cdot f^2(x) \cdot \Delta x.$$

De massa Δm van deze schijf, uitgedrukt in kg, en het gewicht ΔF , uitgedrukt in N, zijn dan respectievelijk:

$$\Delta m = \frac{\pi \cdot \rho}{10^6} \cdot f^2(x) \cdot \Delta x \quad \text{en} \quad \Delta F = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{10^6} \cdot f^2(x) \cdot \Delta x.$$

Elk van deze schijven heeft een verschillend gewicht, maar heeft ook een verschillend hoogteverschil te overwinnen. Een schijf op hoogte x zal grosso modo over een afstand $(c-x)/100$ moeten opgetild worden om uit de fles te kunnen. De arbeid ΔW die hiervoor nodig is, is:

$$\Delta W = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{10^8} \cdot f^2(x) \cdot (c-x) \cdot \Delta x.$$

Om de hele fles leeg te pompen, is het nodig oneindig veel, oneindig kleine arbeidjes ΔW op te tellen. Alle vloeistofge vulde oneindig platte cilinders, gecentreerd rond een x -waarde met $x \in [a, b]$, moeten immers tot aan de rand van de fles opgetild worden. We moeten hier met andere woorden een som met

een limietberekening combineren. Deze samengestelde bewerking noemen we een ‘continue som’. We drukken deze som uit met een integraal:

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW$$

of in onverkorte versie:

$$W = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{10^8} \int_a^b f^2(x) \cdot (c - x) dx .$$

Bij continue sommen is het de gewoonte de notatie voor ‘kleine grootheden’ (hier: ΔW) te vervangen door de notatie voor ‘oneindig kleine grootheden’ (hier dW). De formule hierboven lijkt vrij technisch maar voor een computer of een grafische zakrekenmachine is het niet zo moeilijk deze integraal na te rekenen. Vooraf moeten wel de constanten ρ en g vastgelegd worden. Even snuffelen op het internet naar de massadichtheid van rosé-wijn en de opdracht is volbracht.

```
#34:  ρ := 1000
#35:  g := 9.81
#36:  leegpomparbeid :=  $\frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{10^8} \int_0^{27} f(x)^2 \cdot (31 - x) dx$ 
#37:                                     1.9622
```

5. Olifantenpopulaties modelleren met matrices

Matrices vormen een dankbaar hulpmiddel bij het modelleren. In 2002 hebben we een hele loep besteed aan ‘Migratie- en Lesliematrixes’ ([1] en [7]). Hier willen we opnieuw met Lesliematrixes werken. Lesliematrixes zijn overgangsmatrixes die rekening houden met geboorte en sterfte (interne groei/afname) en zo beschrijven hoe een populatie, die is onderverdeeld in leeftijdsklassen, evolueert in de tijd. We laten de leerlingen een Lesliematrix opstellen, maar leggen nu andere accenten dan in 2002. In de onderstaande werkteksten zoeken de leerlingen bijvoorbeeld zelf naar de vruchtbaarheidsgetallen die in de Lesliematrix komen te staan. Bovendien houden we ook rekening met migratie en laten bijgevolg ook een externe groei/afname toe. Tenslotte proberen we de vruchtbaarheidscijfers aan te passen om de totale populatie onder controle te houden. Een ander belangrijk aspect dat nu aan bod komt, is het in vraag stellen van het model. Wat de beginsituatie betreft, veronderstellen we dat de leerlingen vertrouwd zijn met (het rekenen met) matrices en al een eerste toepassing met migratiematrixes behandeld hebben.

In een eerste werktekst verwerken de leerlingen gegevens over een olifantenpopulatie in een wildpark en zoeken zo naar de vruchtbaarheidscijfers van de Lesliematrix. De werktekst start met correcte info over leeftijdsverwachting en vruchtbaarheid bij olifanten. Ook het totale aantal is realistisch: in 2003 telde het Krugerpark in Zuid-Afrika 11700 olifanten, in 2005 waren het er 12467. Informatie over de aantallen per leeftijdscategorie, vruchtbaarheidscijfers en overlevingscijfers was echter niet te vinden. In de werktekst werken we daarvoor met fictieve aantallen en vereenvoudigingen, die we nadien wel kritisch bestuderen.

Olifanten in een wildpark

In 2005 leefden in een Afrikaans wildreservaat 12500 olifanten. Volwassen olifanten hebben geen natuurlijke vijanden, enkel de mens vormt een mogelijke bedreiging. Sinds olifanten in wildparken echter beschermd worden, neemt hun aantal sterk toe. We willen daarom de evolutie voorspellen van deze olifantenpopulatie.

We verzamelden op het internet informatie over levensverwachting en voortplanting:

- Olifanten worden gemiddeld 50 à 65 jaar oud, uitzonderlijk 75 à 80.
- Een vrouwelijke olifant (koe genoemd) is vruchtbaar vanaf haar 10^{de} levensjaar; meestal heeft ze een eerste zwangerschap op haar 12^{de} en een laatste rond haar 50^{ste} levensjaar.
- Gemiddeld is een koe elke vier tot negen jaar drachtig, afhankelijk van omgevingsfactoren zoals droogte of overbevolking.
- Een dracht duurt 22 maanden.
- Een koe baart meestal één kalf, een tweelingdracht is uitzonderlijk.

Omdat een olifant zelden ouder wordt dan 75 jaar, zullen we de 12500 olifanten verdelen in vier leeftijdsklassen van 20 jaar. Gegevens van de onderlinge verdeling van de olifanten over deze leeftijdsklassen zijn er niet; we geven in de onderstaande tabel daarom fictieve aantallen:

leeftijdsklasse	aantal op 1 januari 2005
0 - 19	4500
20 - 39	3500
40 - 59	3000
60 - 79	1500

Om de evolutie van deze olifantenpopulatie te voorspellen, moeten we weten hoe de aantallen in de afzonderlijke leeftijdsklassen evolueren. Processen die hierbij een rol spelen zijn veroudering, geboorte en sterfte. Olifanten 'verhuizen' hierdoor van één leeftijdsklasse naar een andere, waardoor dit probleem als een 'migratieprobleem' kan benaderd worden. Net zoals we de migratieprocessen beschrijven in een migratiematrix, zullen we hier de evolutieprocessen weergeven in een overgangsmatrix.

1. De periode waarop deze overgangsmatrix betrekking heeft, is 20 jaar. Verklaar dit.

(Omdat we niet weten hoe de leeftijden verdeeld zijn binnen elke klasse, moeten we de overgang bespreken waarbij iedereen uit de ene klasse naar de volgende klasse overgaat.)

Het eerste evolutieproces dat we in ons model willen verwerken, is geboorte. Omdat koeien uit de eerste, tweede en derde leeftijdsklasse drachtig kunnen zijn en de pasgeboren kalfjes uiteraard in de eerste leeftijdsklasse terecht komen, beschrijft dit proces een overgang vanuit de eerste, tweede en derde leeftijdsklasse naar de eerste. De getallen die deze overgang weergeven, noemt men *vruchtbaarheidscijfers*. Als een leeftijdsklasse vruchtbaarheidscijfer

0,3 heeft, betekent dit dat 100 olifanten uit die klasse gemiddeld 30 kalfjes voortbrengen in de loop van 20 jaar.

Omdat we geen gedetailleerde informatie vonden over vruchtbaarheidscijfers bij olifanten, voeren we zelf een aantal veronderstellingen in, zodat we deze vruchtbaarheidscijfers zelf kunnen berekenen en hiermee een model kunnen opstellen. Voor deze veronderstellingen baseren we ons op de gegevens uit de inleiding die we (sterk) vereenvoudigen. In een latere fase zullen we deze vereenvoudigingen kritisch analyseren.

- Elke koe krijgt één kalf op de leeftijd van 15, 25, 35 en 45 jaar. Dit relatief kleine aantal drachten kunnen we motiveren omdat het wildpark al een grote populatie olifanten heeft en het niet onwaarschijnlijk is dat er in een tijdspanne van 10 jaar een periode van grote droogte optreedt.
- Een koe krijgt in een tijdspanne van 20 jaar nooit meer dan 2 kalveren.
- De populatie is gelijkmatig verdeeld over de verschillende jaren in elke leeftijdsklasse: als er 100 olifanten zitten in een leeftijdsklasse van 20 jaar, dan zal elke leeftijd vertegenwoordigd zijn door 5 olifanten.
- De populatie is gelijkmatig verdeeld over vrouwtjes en mannetjes (stieren of bulls).

Aan de hand van de bovenstaande informatie berekenen we voor elke leeftijdsklasse hoeveel babyolifantjes er geboren worden in een tijdspanne van 20 jaar. Hieruit kunnen dan de vruchtbaarheidscijfers afgeleid worden.

2. Een pasgeboren vrouwelijk olifantje (0 jaar) zal na 20 jaar 1 babyolifantje voortgebracht hebben. Verklaar.

(Deze olifant zal op 15-jarige leeftijd één kalf voortbrengen.)

3. Vanaf welke leeftijd (uit de klasse 0-19) zal een vrouwelijke olifant 2 babyolifantjes krijgen binnen een tijdsbestek van 20 jaar? En tot welke leeftijd?

(Vanaf de leeftijd van 5 jaar: deze olifanten zijn na een periode van 20 jaar zelf 25 (of ouder) en hebben dus al twee drachten gehad (één op 15-jarige en één op 25-jarige leeftijd). Dit geldt voor alle vrouwelijke olifanten tot 15 jaar. Alle koeien die tussen 16 en 19 jaar zijn bij de start, brengen ook 2 kalfjes voort: één op 25-jarige en één op 35-jarige leeftijd. Merk op dat de olifanten die bij de start exact 15 jaar zijn, ook maar 2 drachten hebben binnen het tijdsbestek van 20 jaar, vanwege de vereenvoudiging dat een olifant maximaal 2 kalveren heeft in een periode van 20 jaar.)

4. Toon nu aan dat 100 koeien uit de leeftijdsklasse 0-19 na 20 jaar 175 babyolifantjes voortbrengen.

(De eerste 5 leeftijden (0-4) zorgen voor 1 kalfje, alle andere (5-19) voor 2 kalfjes, samen dus $5 \cdot 1 + 15 \cdot 2 = 35$ kalfjes. Omdat elke leeftijd echter vertegenwoordigd is door 5 koeien (zie derde veronderstelling), moet het totaal nog met 5 vermenigvuldigd worden, wat het totaal van 175 geeft.)

5. We veronderstelden dat er in elke leeftijdsklasse evenveel stieren als koeien zitten. Hoe kun je dit gegeven verwerken?

(Ofwel deel je het vorige getal door 2, ofwel reken je 175 kalfjes per 200 olifanten.)

6. Geef nu het vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 0-19 jaar.

$\left(\frac{175}{2}\right) = 87,5$ per 100 olifanten ofwel 175 per 200 olifanten, dus 0,875. In ons model kijken we dus enkel naar de koeien bij het tellen van het aantal kalfjes. Er is bij de mannetjes

zoveel potentiëel dat hun aantal niet belangrijk is, het aantal kalfjes hangt alleen af van het aantal beschikbare koeien.)

7. Toon nu via een analoge redenering aan dat het vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 20-39 jaar 0,9 is.

(De eerste 6 leeftijden (20-25) zorgen voor 2 kalfjes (één op 25-jarige en één op 35-jarige leeftijd), de volgende 10 (26-35) brengen ook 2 kalfjes voort (één op 35-jarige en één op 45-jarige leeftijd) en de laatste 4 (36-39) krijgen elk 1 kalfje (op 45-jarige leeftijd), samen dus $(16 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot 5 = 180$. Nog delen door 2 (gelijkmatige verdeling koeien en bulls) en door 100 geeft 0,9. Merk ook hier op dat de olifanten die bij de start 25 jaar zijn, ook maar 2 drachten hebben binnen het tijdsbestek van 20 jaar, vanwege de vereenvoudiging dat een olifant maximaal 2 kalveren heeft in een periode van 20 jaar.)

8. Bereken het vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 40-59 jaar.

(De leeftijden 40 tot en met 45 krijgen 1 kalf en alle oudere geen enkel meer, samen dus $(6 \cdot 1 + 14 \cdot 0) \cdot 5 = 30$. Nog delen door 2 en door 100 geeft 0,15.)

9. Wat is het vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 60-79?

(0. In ons model kijken we enkel naar de koeien en geen enkele koe ouder dan 45 kan nog kalveren krijgen.)

10. Gebruik de bovenstaande resultaten om aan te tonen dat elke vrouwtjesolifant, die de leeftijd van 45 minstens haalt, gemiddeld 3,85 kalveren krijgt.

(Tel alle vruchtbaarheidscijfers op en vermenigvuldig dit met 2.)

Als we de evolutie van de populatie willen voorspellen, moeten we niet enkel rekening houden met vruchtbaarheidscijfers, de aangroei van de populatie, maar ook met de sterftecijfers, de afname van de populatie. In plaats van (negatieve) sterftecijfers, zullen we (positieve) *overlevingscijfers* geven. Als een bepaalde leeftijdsklasse overlevingscijfer 0,8 heeft, betekent dit dat per 100 olifanten uit die klasse gemiddeld 80 olifanten na 20 jaar nog in leven zijn (en dus in de volgende leeftijdsklasse zitten).

Ook over overlevingscijfers bij olifanten vonden we geen gedetailleerde info; we geven in de onderstaande tabel daarom fictieve getallen.

leeftijdsklasse	overlevingscijfer
0 - 19	0,65
20 - 39	0,70
40 - 59	0,30
60 - 79	0

De lage overlevingscijfers in de eerste leeftijdsklasse kunnen we motiveren vanuit twee verschillende oorzaken. Heel jonge olifanten zijn kwetsbaar voor roofdieren. ‘Tiener’olifanten zijn dan weer erg gevoelig voor periodes van grote droogte: zij hebben geen toegang meer tot moedermelk (omdat er ondertussen een jonger broertje of zusje is) en zijn vaak te klein om hoger in de bomen voedsel te vinden.

11. Overlevingscijfers zijn getallen die tussen 0 en 1 liggen. Verklaar.

(Een overlevingscijfer geeft de kans op overleving weer in een tijdspanne van 20 jaar en ligt bijgevolg tussen 0 en 1.)

12. Waar worden deze overlevingscijfers geschreven in de overgangsmatrix? Leg uit waarom.
(*Net onder de hoofddiagonaal; zie antwoord bij vraag 15. Deze getallen beschrijven de overgang van een leeftijdsklasse naar de eerstvolgende leeftijdsklasse.*)
13. Waar worden de vruchtbaarheidscijfers geschreven in de overgangsmatrix? Leg uit waarom.
(*Op de bovenste rij. Deze getallen geven de overgang weer van een leeftijdsklasse naar de eerste leeftijdsklasse.*)
14. Alle andere plaatsen in de matrix bevatten 0. Verklaar.
(*Het is enkel mogelijk om van een klasse naar een volgende klasse te gaan (overleving) of naar de eerste klasse (geboorte). Alle andere overgangen zijn onmogelijk.*)
15. Stel de overgangsmatrix op.

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 0-19 & 20-39 & 40-59 & 60-79 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0,875 & 0,900 & 0,150 & 0 & 0-19 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 & 20-39 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 & 40-59 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 & 60-79 \end{array} \right. \text{naar } \end{array}$$

Een dergelijke overgangsmatrix, die de evolutie van een populatie beschrijft, wordt een Lesliematrix genoemd naar de bioloog Patrick Leslie.

16. Voer deze overgangsmatrix en de matrix met de beginpopulatie in een grafisch rekenapparaat in.
(*De beginverdeling noemen we B_0 , de Lesliematrix L :*

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4500 \\ 3500 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix} \text{ en } L = \begin{bmatrix} 0,875 & 0,900 & 0,150 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Bereken met dit model de verdeling van de olifantenpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen na 20 en 40 jaar. Geef telkens ook het totale aantal.

$$L \cdot B_0 = \begin{bmatrix} 7537,5 \\ 2925 \\ 2450 \\ 900 \end{bmatrix} = B_{20}, \text{ totaal aantal} = 13812,5 \approx 13813,$$

$$L \cdot B_{20} = \begin{bmatrix} 9595,3 \\ 4899,4 \\ 2047,5 \\ 735 \end{bmatrix} = B_{40}, \text{ totaal aantal} = 17277,2 \approx 17277)$$

Een voordeel van het rekenen met dit model is dat we kunnen voorspellen hoe deze olifantenpopulatie in de toekomst evolueert. We merken o.a. dat het totale aantal sterk toeneemt.

18. Waarom is het niet zinvol om nog verder in de toekomst te kijken (evolutie na 60, 80... jaar)?

(Na 40 à 60 jaar zullen vele omgevingsfactoren vermoedelijk gewijzigd zijn, waardoor de oorspronkelijke gegevens en vereenvoudigingen niet meer van toepassing zijn.)

Bij het opstellen van dit model hebben we gewerkt met fictieve aantallen en ook (sterke) vereenvoudigingen ingevoerd, omdat we gedetailleerde informatie misten over de aantallen per leeftijdscategorie, vruchtbaarheidscijfers en overlevingscijfers. In de volgende vragen nemen we deze beperkingen, en bijgevolg ons gevonden model, kritisch onder de loep.

19. Gegevens van de onderlinge verdeling van de 12500 olifanten over de verschillende leeftijdsklassen hadden we niet. In de tabel bij de inleiding staan daarom fictieve aantallen. Bedenk zelf een andere verdeling van de 12500 olifanten over deze leeftijdsklassen en los vraag 17 opnieuw op met deze gewijzigde beginsituatie. Vergelijk je resultaten met je buur.

$$\text{(Stel bv. } B_0 = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2500 \\ 1000 \end{bmatrix}, \text{ dan zal: } L \cdot B_0 = \begin{bmatrix} 8350 \\ 3250 \\ 2800 \\ 750 \end{bmatrix} = B_{20}, \text{ totaal aantal} = 15150 \text{ en}$$

$$L \cdot B_{20} = \begin{bmatrix} 10651,25 \\ 5427,5 \\ 2275 \\ 840 \end{bmatrix} = B_{40}, \text{ totaal aantal} = 19193,75 \approx 19194.$$

$$\text{Als bv. } B_0 = \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 3000 \\ 2500 \end{bmatrix}, \text{ dan zal het totale aantal na 20 jaar 12325 en na 40 jaar 14559 zijn.}$$

Het totale aantal is blijkbaar erg afhankelijk van de oorspronkelijke verdeling over de verschillende leeftijdsklassen. Toch blijkt in de meeste gevallen het totale aantal na 40 jaar (sterk) toe te nemen; enkel als in de beginverdeling heel weinig olifanten in de eerste twee leeftijdsklassen zitten, neemt het totale aantal af gedurende de eerste tientallen jaren.)

Ook de getallen in de Lesliematrix zijn berekend uitgaande van veronderstellingen en vereenvoudigingen (zie opsomming tussen vraag 1 en 2). We bestuderen eerst de berekening van de vruchtbaarheidscijfers.

20. Waar heb je bij de berekening van de vruchtbaarheidscijfers rekening gehouden met de veronderstelling: een koe krijgt in een tijdspanne van 20 jaar nooit meer dan 2 kalveren?

(Zie antwoorden bij vraag 3 en 7.)

De eerste twee veronderstellingen handelen over het aantal geboortes. Als je hier iets wijzigt, dan zullen de vruchtbaarheidscijfers automatisch mee wijzigen. Veronderstel bv. dat een koe één kalf krijgt op de leeftijd van 15, 20, 25, 30, 35, 40 en 45 jaar en dat ze in een tijdspanne van 20 jaar nooit meer dan 4 kalveren krijgt.

21. Reken na dat het vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 0-19 jaar nu 1,625 is.

(De eerste 5 leeftijden (0-4) zorgen voor 2 kalfjes (één op 15-jarige en één op 20-jarige leeftijd), de volgende 5 (5-9) krijgen elk 3 kalfjes (één op 15-jarige, één op 20-jarige, één

op 25-jarige leeftijd), de volgende 6 (10-15) brengen telkens 4 kalfjes voort (op 15-, 20-, 25- en 30-jarige leeftijd) en de laatste 4 (16-19) ook 4 (op 20-, 25-, 30- en 35-jarige leeftijd), samen dus $(5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4) \cdot 5 = 325$. Nog delen door 2 (evenveel koeien als bulls) en door 100 geeft 1,625. Merk op dat de olifanten die bij de start 15 jaar zijn, ook maar 4 drachten hebben binnen het tijdsbestek van 20 jaar, vanwege de vereenvoudiging dat een olifant maximaal 4 kalveren heeft in een periode van 20 jaar.)

De vruchtbaarheidscijfers voor de andere leeftijdsklassen kunnen op een analoge manier berekend worden. We geven hier de resultaten: 1,775 voor de klasse 20-39 en 0,175 voor de klasse 40-59; uiteraard heeft de klasse 60-79 opnieuw vruchtbaarheidscijfer 0.

22. Vervang de bovenste rij van de Lesliematrix door de nieuwe vruchtbaarheidscijfers. Onderzoek het effect hiervan: behoud de overlevingscijfers in de Lesliematrix L en de beginsituatie B_0 uit de tekst en bereken opnieuw de verdeling van de olifantenpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen na 20 en 40 jaar. Geef telkens ook het totale aantal. Vergelijk deze resultaten met de oorspronkelijke antwoorden op vraag 17.

$$\begin{pmatrix} 1,625 & 1,775 & 0,175 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4500 \\ 3500 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14050 \\ 2925 \\ 2450 \\ 900 \end{bmatrix} = B_{20}, \text{ totaal aantal} = 20325,$$

$$\begin{bmatrix} 1,625 & 1,775 & 0,175 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 \end{bmatrix} \cdot B_{20} = \begin{bmatrix} 28451,875 \\ 9132,5 \\ 2047,5 \\ 735 \end{bmatrix}, \text{ totaal aantal} = 40366,875 \approx 40367.$$

Merk op dat de totale olifantenpopulatie nu veel sterker toeneemt.)

Voor de overlevingscijfers maakten we gebruik van fictieve getallen (zie tabel tussen vraag 10 en 11).

23. Vervang de overlevingscijfers in de Lesliematrix door zelf gekozen getallen. Aan welke voorwaarden moeten deze vier getallen voldoen?

(Ze moeten alle tussen 0 en 1 liggen. Het overlevingscijfer dat bij de laatste leeftijdsklasse hoort, is in principe 0. Als leerlingen opteren dat een olifant uitzonderlijk wel ouder kan worden dan 80 jaar, kan hiervan afgeweken worden. Het bijbehorende getal komt dan in de Lesliematrix in de vierde rij, vierde kolom te staan. Olifanten ouder dan 80 jaar worden dan meegeteld in de leeftijdsklasse 60-79.)

24. Onderzoek opnieuw het effect van deze gewijzigde Lesliematrix op de evolutie van de olifantenpopulatie. (Behoud de vruchtbaarheidscijfers en de beginsituatie uit de oorspronkelijke opgave. Vergelijk je resultaten met de antwoorden op vraag 17.)

25. Zie je nog andere vereenvoudigingen/beperkingen bij het oorspronkelijk model die nog niet besproken zijn?

(O.a. leeftijdsklassen per 20 jaar, waarom niet per 10 jaar bv.? De vereenvoudigingen dat er evenveel koeien als bulls zijn. De vereenvoudiging dat de populatie gelijkmatig verdeeld is over de leeftijdsklassen.

Doordat onze Lesliematrix betrekking heeft op een tijdsspanne van 20 jaar, bekijken we de olifantenpopulatie maar eens in de 20 jaar. Je zou dit kunnen bekijken als een familiefoto van de olifantengroep die om de 20 jaar genomen wordt. Kalfjes die kort na

hun geboorte sterven, staan hierdoor mogelijk op geen enkele familiefoto. Dit relateert mee het lage aantal geboortes dat we in onze veronderstellingen doorvoerden.)

In een tweede (korte) werktekst willen we het aspect migratie invoeren. In de praktijk kan zowel emigratie als immigratie optreden; we beperken ons in de werktekst tot 'georganiseerde' migratie.

Te veel olifanten in een wildpark

We starten met de gegevens en resultaten van de vorige werktekst:

- begin 2005 leefden in een Afrikaans wildreservaat 12500 olifanten, verdeeld over vier leeftijdsklassen (0-19, 20-39, 40-59, 60-79):

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4500 \\ 3500 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

- de bijbehorende Lesliematrix die de evolutie beschrijft, is:

$$L = \begin{bmatrix} 0,875 & 0,900 & 0,150 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 \end{bmatrix}$$

- de verdeling van de olifantenpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen na 20 en 40 jaar:

$$L \cdot B_0 = \begin{bmatrix} 7537,5 \\ 2925 \\ 2450 \\ 900 \end{bmatrix} = B_{20} \text{ en } L \cdot B_{20} = \begin{bmatrix} 9595,3 \\ 4899,4 \\ 2047,5 \\ 735 \end{bmatrix} = B_{40}$$

1. Bereken de verdeling van de olifantenpopulatie 60 en 80 jaar na 2005.

$$(L \cdot B_{40} = \begin{bmatrix} 13112,5 \\ 6236,9 \\ 3429,6 \\ 614,2 \end{bmatrix} = B_{60} \text{ en } L \cdot B_{60} = \begin{bmatrix} 17601,1 \\ 8523,1 \\ 4365,9 \\ 1028,9 \end{bmatrix} = B_{80})$$

We merken dat de olifantenpopulatie (te) fel stijgt. Dit fenomeen wordt nu al waargenomen in verschillende wildparken in Afrika. Om het totale olifantenbestand binnen aanvaardbare grenzen te houden, past men een (georganiseerde) emigratie toe: men verplaatst kudde olifanten naar andere wildparken en/of men elimineert enkele familiekudde (omwille van hun sociale banden is het beter om ineens een hele kudde te doden i.p.v. het gericht afmaken van enkele individuen uit verschillende kudde).

We gaan dus op zoek naar een emigratiematrix E die ervoor zorgt dat de totale populatie van $L \cdot B_0 + E$ ongeveer gelijk is aan de totale populatie van B_0 .

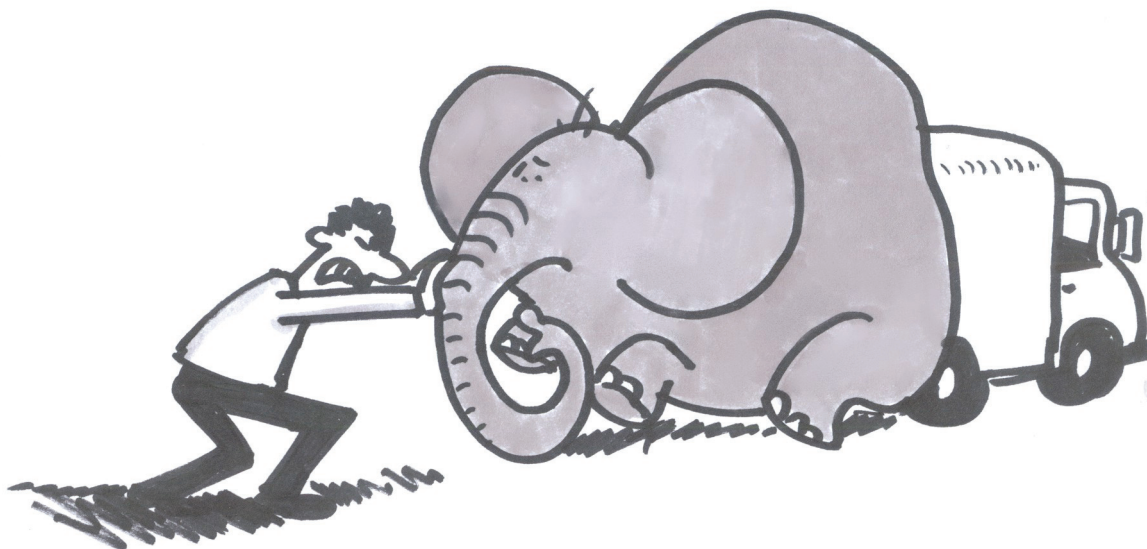
2. Als $L \cdot B_0 + E = B_0$, dan zal de bovenstaande bewering zeker kloppen. Bereken hieruit een mogelijke emigratiematrix E .

$$(E = B_0 - L \cdot B_0 = \begin{bmatrix} -3038 \\ 575 \\ 550 \\ 600 \end{bmatrix})$$

Dit strookt echter niet met de georganiseerde emigratie van familiekuddes die men wil toepassen: er worden enkel kalfjes verplaatst (verwijderd) en bij de andere leeftijdsklassen past men immigratie in plaats van emigratie toe.

3. Ga nu op zoek naar een emigratiematrix, waarbij je zelf kiest hoeveel olifanten van elke leeftijdsklasse moeten 'emigreren', opdat de totale olifantenpopulatie min of meer constant blijft gedurende de eerstvolgende 20 jaar. Zorg ervoor dat je uit elke leeftijdsklasse olifanten laat 'emigreren'. Uiteraard zijn meerdere oplossingen mogelijk.

(Leerlingen zoeken zelf een 4×1 -emigratiematrix E , waarin alle getallen negatief zijn en verschillend van 0. Omdat de totale populatie na 20 jaar in het oorspronkelijke model 13813 was tegenover 12500 in de beginsituatie, moeten ze dus in totaal (ongeveer) 1313 olifanten laten emigreren.)



4. Bereken nu, met de oorspronkelijke matrices L en B_0 en jouw emigratiematrix E , de verdeling van de olifantenpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen na 20 jaar. Bekijk je resultaat kritisch.

$$(Als E = \begin{bmatrix} -500 \\ -350 \\ -300 \\ -150 \end{bmatrix} (bv.), dan zal L \cdot B_0 + E = \begin{bmatrix} 7037,5 \\ 2575 \\ 2150 \\ 750 \end{bmatrix}. Het totale aantal is 12513, wat$$

overeenstemt met de beginpopulatie. Er is nu echter een (te) groot overwicht aan jonge olifantjes.)

5. Hoewel de totale populatie aangroeit in de tijd als er geen 'emigratie' wordt toegepast, kan het toch zinvol zijn om ook 'immigratie' toe te laten. Verklaar.

(Het is vooral de eerste leeftijdsklasse die te fel aangroeit. Als we vele babyolifantjes willen transporteren en de familiale banden willen behouden, moeten ook vele oudere olifanten emigreren. Maar hierdoor krijgen we een onevenwichtige verdeling. Deze kunnen we compenseren door 'invoer' van kuddes met voornamelijk oudere olifanten.)

6. Bedenk nu een variant waarbij je gebruik maakt van een emigratiematrix (olifanten overbengingen naar een ander park) en een immigratiematrix (olifanten importeren vanuit een ander park) om een stabiele totaalpopulatie te verkrijgen.



In een laatste werktekst proberen we de totale olifantenpopulatie onder controle te houden via een ingreep op de vruchtbaarheidscijfers.



Make love, not war

We starten opnieuw met gegevens en resultaten van de eerste werktekst:

- begin 2005 leefden in een Afrikaans wildreservaat 12500 olifanten, verdeeld over vier leeftijdsklassen (0-19, 20-39, 40-59, 60-79):

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4500 \\ 3500 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

- de bijbehorende Lesliematrix die de evolutie beschrijft, is:

$$L = \begin{bmatrix} 0,875 & 0,900 & 0,150 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0 \end{bmatrix}$$

In de vorige werkteksten berekenden we dat de totale olifantenpopulatie te sterk aangroeit in de tijd. Zelfs een georganiseerde migratie (het verplaatsen of elimineren van kuddes) kon het

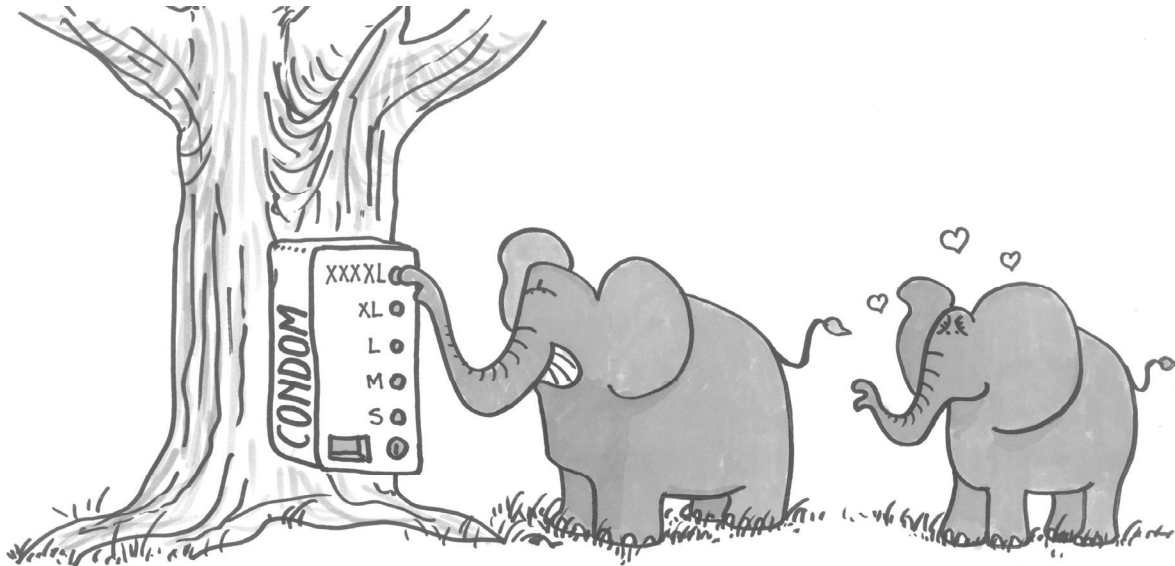
probleem amper oplossen, als het in realiteit al uitvoerbaar is. Vandaar dat we nu voor een andere aanpak kiezen: laat ons het probleem bij de wortel aanpakken en rechtstreeks ingrijpen op de vruchtbaarheidscijfers, via sterilisatie (hoewel we ons terecht kunnen afvragen of dit voorstel in de realiteit uitvoerbaar is).

1. Vervang de bovenste rij van de Lesliematrix door nieuwe vruchtbaarheidscijfers. Experimenteer zelf met meerdere mogelijkheden. Je kunt ervoor opteren om alleen oudere koeien te steriliseren, of uit elke klasse enkele vrouwtjes. Onderzoek telkens het effect van je nieuwe Lesliematrix door de verdeling van de olifantenpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen na 20 jaar te berekenen, samen met het totale aantal.

(Kies je als vruchtbaarheidscijfers bijvoorbeeld 0,6; 0,7; 0,1 en 0, dan zijn er na 20 jaar 11725 dieren. Kies je bijvoorbeeld 0,6; 0,7; 0 en 0, dan krijg je 11425 dieren na diezelfde periode.)

2. Heeft het zin om bulls te steriliseren?

(Dit is minder zinvol, omdat er een groot aanbod aan bulls is. Zolang een enkele vruchtbare bull overblijft, kunnen nog altijd meerdere koeien bevrucht worden.)



Bibliografie

- [1] J. Deprez, H. Eggermont, *Migratie- en Lesliematrixes*, Uitwiskeling 19/1, 2002
- [2] A. Heck, *Dit programma wordt u aangeboden door Amstel*, Nieuwe Wiskrant 29/2, 2009, 37-45, <http://staff.science.uva.nl/~heck/Research/art/bierNW.pdf>
- [3] M. J. Lewis en C. W. Bamforth, *Essays in Brewing in Science*, Lewis & Bamford editions, Spring Verlag, New York, 2006, 28-42
- [4] D. Ramboer, *Modelleren vanuit experimenteel verkregen data*, Cahier T³ Europe Vlaanderen nr. 7, <http://www.t3vlaanderen.be/fileadmin/media/cahiers/pdf/cahier7.pdf>
- [5] Roels, J., De Bock, D., Deprez, J., Janssens, D., Kesselaers, G., Op de Beeck, R., Roelens, M., *Wiskunde vanuit toepassingen*, Aggregatie HSO Wiskunde – K.U.Leuven (Leuven), 1990.
- [6] M. Vogel, *De atmosferische CO₂-Gehalt, Datenstructuren mit Funktionen beschreiben*, Mathematik lehren 148, juni 2008, 50-55
- [7] http://wet.kuleuven.be/wetenschapinbreedbeeld/lesmateriaal_wiskunde/lesmateriaal_wiskunde

Johan, Regi en Luc