

# Onderzoekscompetenties wiskunde in de 3de graad.

## Wiskunde B-dag als middel

Johan Deprez  
Gilberte Verbeeck

### 1. Inleiding

Sinds de invoering van de eindtermen moet in de aso-studierichtingen met pool wiskunde aandacht besteed worden aan wiskundige onderzoekscompetentie. Deze nascholing wil leerkrachten kennis laten maken met een initiatief dat zich hierop richt, namelijk de Wiskunde B-dag.

Bij het opstellen van deze tekst hebben we dankbaar gebruik gemaakt van de ervaringen van een aantal collega's die in de voorbije jaren deelnamen aan de Wiskunde B-dag. We bedanken Maria De Ryck, Els Dereymaker, Greet Kesselaars, Hilde Eggermont, Pedro Tytgat, Herman Kets, Hector Momaerts, Rik Van Eecke en Henk Van Der Kooij voor hun inbreng bij de uitwisseling van ervaringen.

### 2. De Wiskunde B-dag

In Nederland moeten wiskundeleerkrachten al langer dan in Vlaanderen werken aan onderzoeksvaardigheden. Omdat dergelijke vaardigheden moeilijk te toetsen zijn in schriftelijke examens, is het fenomeen Wiskunde B-dag in het leven geroepen door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Op die manier wilde het Freudenthalinstituut leerkrachten stimuleren om daadwerkelijk aandacht te besteden aan onderzoekscompetentie. De Wiskunde B-dag wordt georganiseerd sinds 1999-2000. Sinds 2005-2006 is de Wiskunde B-dag ook toegankelijk voor Vlaamse scholen.

De Wiskunde B-dag-commissie ontwerpt elk jaar een opgave die dan op een vrijdag in november aan leerlingen voorgelegd wordt. De opgave bestaat uit een open opdracht, voorafgegaan door enkele kleinere vraagjes om er in te komen. Vaardigheden als probleemoplossend denken, mathematiseren, kritisch evalueren van wiskundige modellen, logisch redeneren, argumenteren en samenwerken staan centraal. De doelgroep zijn leerlingen uit de derde graad uit studierichtingen met veel wiskunde. Leerlingen werken in groep samen aan de oplossing en mogen gebruik maken van boeken en computers. De teams verwerken hun oplossingen tot een werkstuk.

De Wiskunde B-dag wordt georganiseerd onder de vorm van een wedstrijd, maar je kan de opdracht ook gebruiken zonder aan de wedstrijd deel te nemen. Neem je deel aan de wedstrijd, dan organiseer je op de afgesproken dag een volledige wedstrijddag op school. Via hun wiskundeleerkracht schrijven teams van drie of vier leerlingen zich vooraf in. Op de bewuste vrijdag in november krijgen ze de opgave en kunnen ze er de hele dag aan werken. Tegen het einde van de dag maken de teams een werkstuk. De wiskundeleerkracht kiest welke werkstukken naar Utrecht worden opgestuurd: één werkstuk voor een school met minder dan 10 deelnemende teams, twee werkstukken voor een school met 10 of meer teams. De werkstukken worden beoordeeld in twee evaluatierondes. In de eerste ronde worden de werkstukken verdeeld over leerkrachten van de deelnemende scholen. De werkstukken die hier als beste uitkomen, worden dan in een tweede ronde beoordeeld door de Wiskunde B-dag-commissie. De beste teams krijgen een prijs.

Elk jaar worden een 100-tal werkstukken ingestuurd (maar het aantal teams dat aan de wedstrijd deelneemt is daar dus een veelvoud van). In 2005 deden 4 Vlaamse scholen mee en leverde dat meteen

een werkstuk bij de beste tien op. Het jaar nadien deden 13 Vlaamse scholen mee. Eén team won de eerste prijs en een ander team de vierde prijs. Sinds 2007 doen een twintigtal Vlaamse scholen mee en elk jaar vallen één of meerdere Vlaamse teams in de prijzen. Naast Nederlandse en Vlaamse deelnemers zijn er sinds enkele jaren ook een beperkt aantal Duitse deelnemers.

Op de website van de Wiskunde B-dag (<http://www.fi.uu.nl/wisbdag/>) vind je alle informatie over het initiatief: datum voor dit jaar (tweede helft november), inschrijven, de opgaven van alle voorgaande jaren, soms wat toelichting bij de oplossingen, ...

### **3. Wiskunde B-dag en onderzoekscompetentie**

De specifieke eindtermen voor het Vlaamse onderwijs voor leerlingen uit de derde graad uit aso-studierichtingen met pool wiskunde bevatten drie eindtermen die onder de noemer onderzoekscompetentie gecatalogeerd worden:

De leerlingen kunnen

- zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.
- een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.
- de onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.

De Wiskunde B-dag draagt bij tot het realiseren van de tweede en derde eindterm: de leerlingen voeren een wiskundig getinte onderzoeksopdracht uit en rapporteren over de onderzoeksresultaten en conclusies. Het confronteren met andere standpunten en evalueren van de conclusies komen niet noodzakelijk aan bod tijdens de dag zelf. Via een nabespreking in de klas kun je ze echter wel in het concept integreren (maar de datum waarop de Wiskunde B-dag gehouden wordt, is daarbij natuurlijk een spelbreker...).

De eerste eindterm komt bij de Wiskunde B-dag niet of toch veel minder aan bod. Deze eindterm sluit veel meer aan bij onderzoek waarvoor de leerling informatie opzoekt in de literatuur of op het internet en deze informatie synthetiseert of toepast op een concrete onderzoeksvraag. Bij de ‘zuivere’ wiskunde bevindt dergelijk onderzoek zich toch eerder in de marge van het gebeuren (denk bijvoorbeeld aan het maken van een werkstuk over het leven van een wiskundige). Binnen de context van het wiskundeonderwijs is de eerste eindterm wel relevant bij onderzoek dat steunt op statistische informatie.

Bij wiskundig onderzoek haal je informatie niet in de eerste plaats uit boeken, maar genereer je die zelf door te redeneren. Daarom is wiskundige onderzoekscompetentie erg verwant met probleemoplossende vaardigheden, redeneervaardigheden, mathematiseren, ... Het sterke punt van de Wiskunde B-dag is dat dit initiatief vanuit deze visie op wiskundig onderzoek vertrekt. Leerlingen verrichten een ‘echt’ wiskundig onderzoek(je), weliswaar op een eenvoudig niveau. Om de opgave te begrijpen, is geen ingewikkelde wiskunde nodig. De kennis die de leerlingen t.e.m. het vierde jaar opgebouwd hebben, volstaat hiervoor. De onderzoeksopdracht uitvoeren doe je door te redeneren en probleemoplossende vaardigheden komen goed van pas. Informatie opzoeken helpt je hier geen stap vooruit.

Zo’n opgave waar leerlingen een hele dag rond kunnen werken, verzin je als individuele leerkracht niet zomaar. Dat is een ander sterk punt van de Wiskunde B-dag. Een team van leerkrachten, docenten van de universiteit en medewerkers van het Freudenthalinstituut werkt de opgave uit. Dit resulteert in een kwalitatieve opgave die veel onderzoeksmogelijkheden biedt.

## 4. Een mini-Wiskunde-B-dag

De onderstaande opgave is gebaseerd op de opgave van de Wiskunde-B-dag van 2003. De volledige opgave is te vinden op de website van de Wiskunde B-dag.

### Wiskundig door de bocht

De tangle bestaat uit elleboogjes die een kwart van een cirkel vormen en die allemaal even groot zijn. Je kan ze aan elkaar klikken. Er zijn 18 bochtjes beschikbaar.

1. Maak met de tangle een vlak 8-circuit (d.w.z. een vlakke, gesloten vorm met 8 bochtjes zonder zelfdoorsnijdingen). Bepaal de omsloten oppervlakte. Neem hierbij aan dat de straal van de cirkel waaruit de bochtjes gemaakt zijn de lengte-eenheid is. Idealiseer: doe alsof de bochtjes geen dikte hebben.
2. Maak alle mogelijke vlakke 12-circuits. Welke mogelijkheden zijn er voor de omsloten oppervlakte?
3. Alle vlakke circuits bestaan uit een aantal elleboogjes dat een 4-voud is en voor elk 4-voud bestaat er minstens één circuit met dat aantal elleboogjes. Dit hoeft je niet aan te tonen (zie echter de bonusvraag). Zoek een formule voor de minimale en maximale omsloten oppervlakte van een vlak circuit in functie van het aantal elleboogjes waaruit het circuit bestaat.

Maak van je bevindingen in verband een leesbare tekst.

#### *Bonusvraag*

*Toon aan dat vlakke circuits altijd bestaan uit een aantal elleboogjes dat een 4-voud is.*

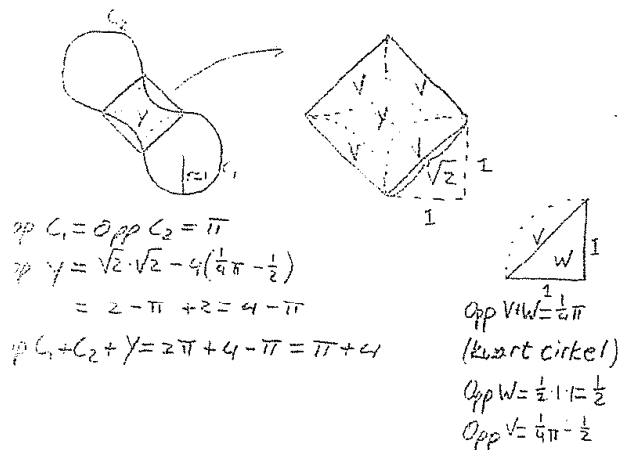
## 5. Het werk van leerlingen

In wat volgt bekijken we gedeelten uit het werk van leerlingen. We beschouwen de opgaven van de jaren 2003 ‘Wiskundig door de bocht’, 2006 ‘Tussen de wijzers van de tijd’ en 2007 ‘Polygonen en driehoeken’.

### a. Wiskundig door de bocht (2003)

Van deze opgave hebben jullie voor de pauze kunnen proeven. We bekijken 4 werken van leerlingen waar telkens een andere aanpak gehanteerd wordt.

## Eerste werk



We bekijken nu alleen de wiskundige representatie van de elleboogjes, waarbij de dikte van de elleboogjes wordt verwaarloosd. Dat zijn kwartcirkels met straal 1. De omsloten oppervlakte van het 4-circuit is dus  $\pi$ .  $Opp_{cirkel} = \pi r^2$  met  $r=1$  geeft  $\pi$ .

Natuurlijk hangt de oppervlakte van een vlak  $n$ -circuit samen met de waarde van  $n$ , maar daarnaast is ook de vorm van het circuit van invloed op de omsloten oppervlakte.

Uiteindelijk zijn we uitgekomen op de volgende formule

$$Opp = \pi + 4(k-1) + 8m$$

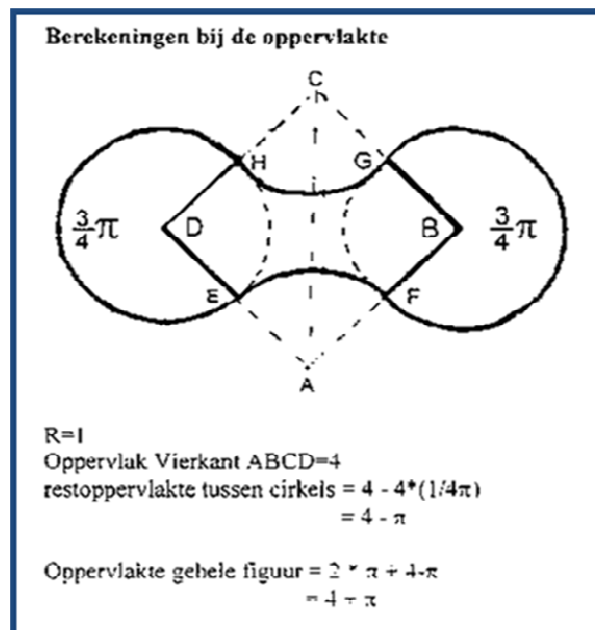
Waarbij

$k =$  alle gehele getallen  $\geq 3$

$m =$  alle gehele getallen tussen 0 en  $k-2$

$$Opp(1) = \pi \text{ en } Opp(2) = \pi + 4$$

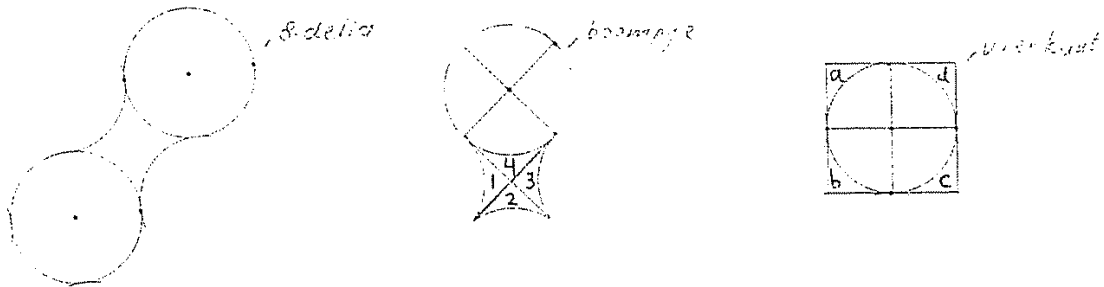
## Tweede werk



## Derde werk

-Eerst laten we zien dat de oppervlakte van een 8-circuit gelijk is aan  $\pi + 4$

Als basis van ieder aantal elleboogjes nemen  $\pi$ : de oppervlakte van een cirkel met een straal van 1. Hier kun je steeds 4 bij optellen afhankelijk van het aantal elleboogjes en de vorm die je daarvan maakt. Dit li chten we toe aan de hand van het onderstaand figuur:

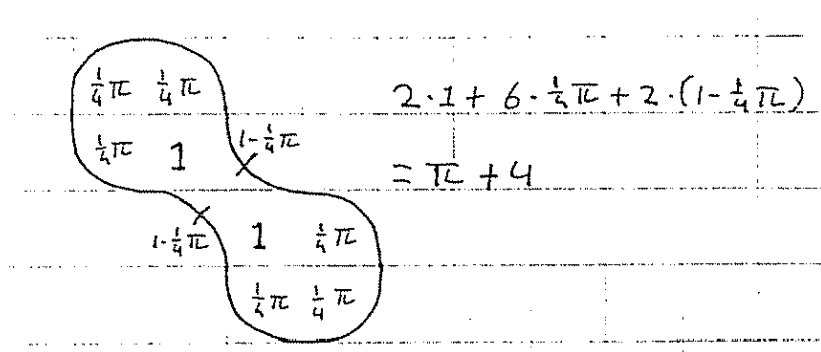


Hierboven zien we de vorm van een 8-circuit. Die kun je opdelen in een hele cirkel en in een vorm die we vorm het gemak een 'boompje' noemen. De oppervlakte van de vlakken 1, 2, 3 en 4 en de cirkel van het boompje zijn gelijk aan de oppervlakte van het vierkant met de vlakken a, b, c, en d in de ingeschreven cirkel. Het vierkant met de cirkel met een straal van een heeft uiteraard zijden van 2. Dus de oppervlakte van het vierkant is 4. Dus is de oppervlakte van het boompje ook 4.

De oppervlakte van een 8-circuit is dus  $\pi + 4$ .

## Vierde werk

de oppervlakte binnen een 8-circuit is gelijk aan  $\pi+4$ .



Dat zie je duidelijk in de figuur wanneer je de figuur in een rooster van blokjes van 1 x 1 zet. Een kwartcirkel heeft een oppervlakte van  $1/4\pi \text{ cm}^2$ . Een vierkant van 1cm x 1cm heeft een oppervlakte van  $1 \text{ cm}^2$ . Verder komt er ook nog een vierkant voor waar een kwartcirkel uit is gehaald. De oppervlakte daarvan is gelijk aan  $1 - 1/4\pi \text{ cm}^2$ . Bij dit figuur krijg je dan de oppervlakte:

$$2*1 + 6*(1/4\pi) + 2*(1 - 1/4\pi) = 4/4\pi + 2 + 2$$

$$= \pi + 4$$

## b. Tussen de wijzers van de tijd (2006)

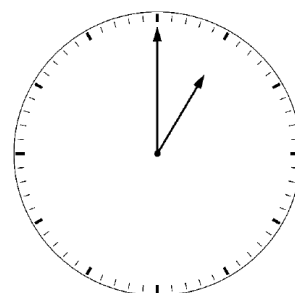
De opgave van 2006 stond geheel in het teken van de tijd en het spel van de wijzers op een analoge klok. De opgave bestond uit 4 delen: Deel A 'Redeneren over wijzerstanden', Deel B 'Rekenen aan wijzerstanden', Deel C 'Nachtmerrie' en Deel D 'Uren, minuten en seconden: een uitdaging voor de echte tijd-geesten'. We bekijken het werk van een groepje leerlingen die erin slaagden over de vraagjes heen een formule te ontwikkelen die hen toeliet een aantal vragen uit beide delen te beantwoorden. In wat volgt hebben we ons gebaseerd op dit ene werk. Achteraan kan je de volledige leerlingerversie vinden.

### *De opgave*

Het is op de afgebeelde klok precies 1 uur. Binnenkort haalt de grote wijzer de kleine in! Dat gebeurt vlak na 5 over 1.

De vragen uit de inleiding:

- A Hoeveel keer per 12 uur staan de minuten- en de urenwijzer precies op elkaar?
- B Hoe laat precies haalt op bovenstaande klok de minutenwijzer de urenwijzer in?



Enkele vragen uit deel A:

- A1. Als de twee wijzers in elkaars verlengde staan, zoals bij precies 6 uur, dan maken de twee wijzers een hoek van 180 graden. Hoe vaak in een periode van 12 uur is er sprake van zo'n stand van 180 graden?
- A2. Hoe vaak, in een periode van 12 uur, vormen de twee wijzers een hoek van 90 graden, van 120 graden, van 30 graden?
- A3. Vier keer de vraag "Hoe laat is het?". Twee keer is er wel een tijdstip te vinden en twee keer is dat onmogelijk...
  - a. De wijzers staan in elkaars verlengde en de minutenwijzer staat vrij dicht bij de '11'. Hoe laat is het?

Enkele vragen uit Deel B:

- B2 a. De hoek tussen de twee wijzers verandert voortdurend. Welke hoeken komen voor tussen de tijdstippen tien over drie (3:10) en tien over half vier (3:40).
- b. Hoe groot is de hoek tussen de twee wijzers om 5 voor half 5?
- B3 Op welke exacte tijdstippen
  - staan de twee wijzers precies op elkaar?
  - staan de twee wijzers recht tegenover elkaar?
  - maken de twee wijzers een hoek van 90 graden, van 120 graden, van 30 graden?

*Een antwoord gebaseerd op het verslag van leerlingen.*

Een aantal groepen stelden een vergelijking op van de functie die het verband geeft tussen de hoek die de wijzer aflegt en de tijd. Zo krijg je vergelijkingen waarbij  $x$  de tijd in uren voorstelt, waarbij we deze voorstellen per 12 uren. Dus 13 uur wordt terug 1 uur en  $y$  de hoek in graden:

$$y = 30x \text{ voor de korte wijzer}$$

$$y = 360(x - a) \text{ voor de lange wijzer; hierbij is } a \text{ het aantal gehele uren die voorkomen in de tijd } x \text{ en bijgevolg is } a \text{ een geheel getal met } 1 \leq a \leq 11$$

We vertrekken bij  $x = 0$  met de twee wijzers bovenaan op elkaar.

De gepresenteerde vragen hebben allemaal een verband met de hoek tussen de twee wijzers. Neem je het verschil in afgelegde hoek, dan vind je de volgende formule:

$$\Delta\vartheta = |360(x - a) - 30x| \quad (1)$$

We werken met de kleinst mogelijke hoek.

De vragen A, A1, A2, A3, B en B3 kunnen nu vervangen worden door één vraag:

*Wanneer en hoeveel keer is  $\Delta\vartheta = 0, \Delta\vartheta = 30, \Delta\vartheta = 90, \Delta\vartheta = 120, \Delta\vartheta = 180, \dots$*

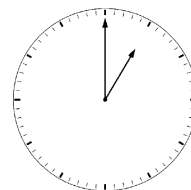
$$\Delta\vartheta = 0$$

Daar  $1 \leq a \leq 11$  zullen we 11 mogelijke uitkomsten bekomen waarbij de wijzers precies op elkaar staan (vraag A). Deze vraag kon ook intuïtiever opgelost worden: In elk volledig uur zullen de wijzers precies één keer samenvallen. Bij het twaalfde volledige uur is de 'samenvallende stand' terug bovenaan, de stand waarvan we vertrokken op tijdstip  $x = 0$ .

Om de tijdstippen te bepalen waarop de wijzers precies op elkaar staan, lossen we de vergelijking (1) op naar  $x$

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= |360(x - a) - 30x| = 0 \\ \Leftrightarrow 360x - 360a - 30x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{360a}{330} = \frac{12a}{11} = a + \frac{a}{11} \end{aligned}$$

De minutenwijzer haalt bijgevolg in de gegeven situatie van de klok hiernaast de urenwijzer precies in om  $1 + \frac{1}{11}$  uur en dus om 1u 5' 27" (afgerond op de seconde na). Hiermee is vraag B opgelost, maar ook vraag B3 deel 1. De minutenwijzer haalt bv. de urenwijzer telkens in  $\frac{a}{11}$  na het gehele uur  $a$ . Dus in het vierde uur is dat om 3u16'22".



$$\Delta\vartheta = 180$$

Daar  $1 \leq a \leq 11$  zullen we weer 11 mogelijke uitkomsten bekomen waarbij de wijzers precies in elkaars verlengde staan. Hoewel hier het teken  $\pm 180^\circ$  lijkt mee te spelen, maakt dit voor de stand van de wijzers niet uit. En zullen de wijzers weer telkens eenmaal per uur een hoek van  $180^\circ$  graden maken of in elkaars verlengde staan. De oplossing van deze vergelijking lost de vragen A1, A3a en B3 deel 2 op.

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= |360(x - a) - 30x| = 180 \\ \Leftrightarrow 360x - 360a - 30x &= \pm 180 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pm 180 + 360a}{330} = \frac{\pm 6 + 12a}{11} = \frac{\pm 6}{11} + a \frac{12}{11} \end{aligned}$$

Voor de wijzerstanden maakt het niet uit of de hoek  $+$  of  $-$  is. Of als  $a$  alle mogelijke waarden doorloopt geeft de bovenstaande uitdrukking de 11 mogelijke tijdstippen waarbij de wijzers in elkaars verlengde staan.

$$\Delta\vartheta = 30, \Delta\vartheta = 90, \Delta\vartheta = 120$$

Deze hoekenstand van de wijzers komt telkens tweemaal per uur voor. Zodat de wijzers 22 maal een hoek van  $30^\circ$  maken (zo ook  $90^\circ$  en  $120^\circ$ )... het antwoord op vraag A2. We vinden dit ook door de vergelijking  $|\Delta\vartheta| = 30$  op te lossen. Uiteindelijk zouden we beter de algemene vergelijking oplossen... meerdere vliegen in één klap

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta &= |360(x-a) - 30x| \\ \Leftrightarrow 360x - 360a - 30x &= \pm \Delta\vartheta = |\Delta\vartheta| \\ \Leftrightarrow x &= \frac{|\Delta\vartheta| + 360a}{330} = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + \frac{12a}{11} = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + a \frac{12}{11}\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking lost de vragen A2 en B3 deel 3 en B2 op.

Hoewel de leerlingen wellicht de eerste vragen nog minder abstract oplossen, is het naar het verslag toe beter via de formule te werken. Hiervoor dienen dan niet noodzakelijk alle antwoorden op alle vraagjes gegeven te worden.

### c. Polygonen, kappen en driehoeken (2007)

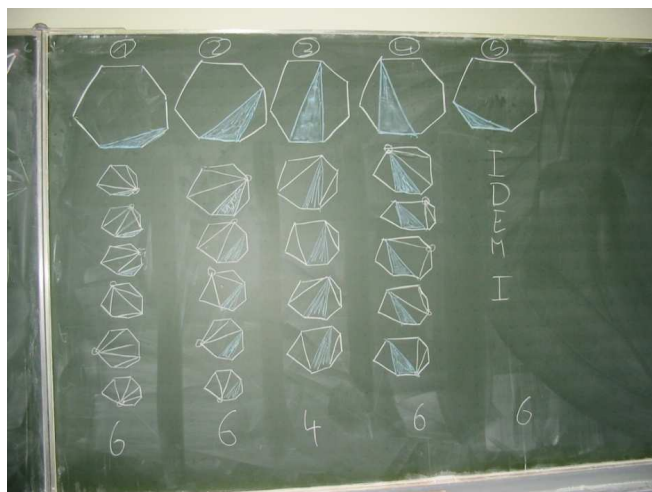
In de opgave van 2007 werden heel wat nieuwe begrippen gedefinieerd. Een bundel van 17 bladzijden is heel wat om snel in thuis te raken. De opgave bestond uit 5 delen:

- Deel A 'Hoek(punt)en van polygonen',
- Deel B 'Diagonalen en kappen',
- Deel C 'Triangulatie van polygonen',
- Deel D 'Triangulaties tellen',
- Deel E 'De stelling van de twee kappen',
- Deel F 'Bewaakte polygonen'.

Vooraf in delen A en B kregen de leerlingen richtvragen aangeboden om een basis te leggen voor de belangrijke vragen die in de andere delen aan bod kwamen. Er waren 4 onderzoeksoopdrachten verwerkt. In de inleiding werd duidelijk gesteld dat de onderzoeksvragen er echt toe deden... dat dat de vragen waren waar mee te scoren viel. De instructies gaven aan dat de kern van het verslag moest handelen over de volgende 2 onderzoeksvragen:

#### 1. Stelling over de triangulatie

*Bij elke simpele polygoon met  $n$  hoekpunten is er een triangulatie met  $n-2$  driehoeken*

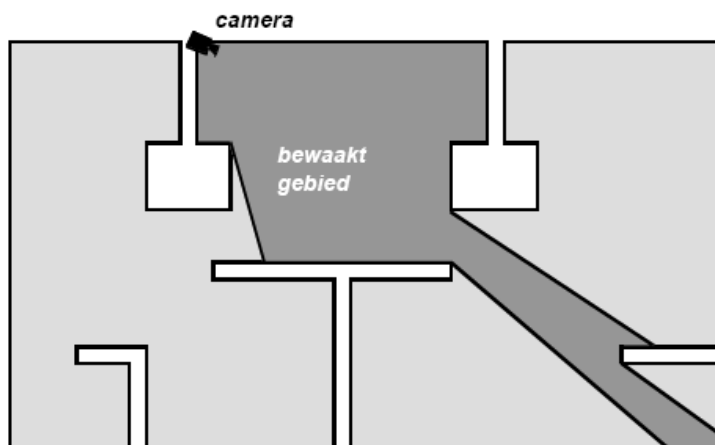




## 2. Stelling van de bewaakte polygonen

Een simpele polygoon met  $n$  hoekpunten kan altijd bewaakt worden door  $p$  camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met  $p$  gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor geldt  $p > \frac{1}{3}n - 1$ .

In het laatste deel moesten leerlingen op zoek gaan naar het minimaal aantal camera's om de gegeven ruimte te bewaken... een motiverende opdracht.



### Inleidende vragen

We nemen één van de allereerste richtvragen even onder de loep omdat onmiddellijk hier al een zeer verschillende aanpak van leerlingen blijkt. Eerst geven we enkele definities van begrippen die gebruikt worden.

#### Definities

Een polygoon  $P$  is een gesloten lijn die uit  $n$  lijnstukken bestaat. Er zijn  $n$  verschillende hoekpunten  $P_1, \dots, P_n$ , de *hoekpunten* van de polygoon, en  $n$  zijden

$$z_1 = P_1P_2, z_2 = P_2P_3, \dots, z_{n-1} = P_{n-1}P_n, z_n = P_nP_1.$$

We noteren ook  $P = P_1 \dots P_n$ .

Een polygoon met  $n$  hoeken (en  $n$  zijden) heet een  $n$ -hoek of  $n$ -hoek.

Een *simpele* polygoon is een polygoon die geen zelfdoorsnijdingen heeft.

Een simpele polygoon verdeelt het vlak in 2 gebieden. Een begrensde gebied heet het *binnengebied*. Het onbegrensde heet het *buitengebied*. De zelf behoort *niet* tot het binnen- of buitengebied.

De grootte van de *hoeken* van een polygoon wordt bepaald door de hoeken in het binnengebied.

Er zijn 3 soorten hoeken.

- *uitspringende* hoeken met een maatgetal tussen  $0^\circ$  en  $180^\circ$ .
- *gestrekte* hoeken met een maatgetal gelijk aan  $180^\circ$
- *inspringende* hoeken met een maatgetal tussen  $180^\circ$  en  $360^\circ$ .

R1b. Kun je een formule bedenken voor de som van de binnenhoeken van een veelhoek met  $n$  hoekpunten zonder inspringende hoeken? (De formule moet de hoekensom uitdrukken in het aantal punten  $n$  van de polygoon).

Heel wat groepen vinden (of herhalen) de formule  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Toch zijn er ook groepen die hier al de mist in gaan. Slechts weinig groepen hebben de reflex om van deze formule een grondig bewijs te geven. Leerlingen zouden zeggen 'dat wordt toch niet gevraagd!' Hier onderscheiden echter de sterkste groepen zich, deze die zich een automatische reflex tot bewijzen hebben aangeleerd..

Sommige groepen nemen deze vraag helemaal niet op in hun werk. Dit kan! Het gaat immers om een richtvraag, een vraag om je op weg te zetten. Het zoeken op het antwoord geeft je wellicht ideeën die je verder kan gebruiken.

Een voorbeeld van een groep die een bewijs leverde:

De som van de binnenhoeken van elke driehoek is  $180^\circ$ . Voor een bewijs hiervan, zie Fig. 1. De som van de binnenhoeken van een polygoon wordt gegeven door de formule:

$$180(n - 2).$$

Het bewijs hiervan gaat als volgt via inductie (zie ook Fig. 2):

$$S_n = 180(n - 2)$$

$$S_3 = 180(3 - 2) = 180$$

$$S_n + 180 = S_{n+1}$$

$$180(n - 2) + 180 = 180((n + 1) - 2)$$

$$180n - 360 + 180 = 180(n - 1)$$

$$180n - 180 = 180n - 180$$

*Q.E.D.*

*De stelling van de bewaakte polygonen.*

Wat vind je van de onderstaande bewijzen?

Eerste werk:

Te bewijzen: stelling van de bewaakte polygoon

Een simpele polygoon met  $n$  hoekpunten kan altijd bewaakt worden door  $p$  camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met  $p$  gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor  $p > 1/3n - 1$ .

Bewijs door middel van inductie:

$$1. P > 1/3 \times 3 - 1 \Rightarrow P > 0$$

$$2. P_n > 1/3n - 1$$

$$P_{n+1} > 1/3(n+1) - 1$$

$$P_{n+1} > 1/3n + 1/3 - 1$$

$$P_{n+1} > 1/3n - 2/3$$

$$P_{n+1} > P_n$$

$$1/3n - 2/3 > 1/3n - 1$$

Tweede werk:

### De stelling van de bewaakte polygoon.

*Een simpele polygoon met  $n$  hoekpunten kan altijd bewaakt worden door  $p$  camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met  $p$  gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor geldt  $p > \frac{1}{3}n - 1$ .*

Om deze stelling te bewijzen beginnen we eerst met een voorbeeld (zie Fig. 6).

Eerst tonen we aan dat  $p = \frac{1}{3}n - 1$  echt niet klopt bij bijvoorbeeld  $n = 9$ . In dit geval lukt het niet omdat er geen enkel hoekpunt in de polygoon is waarvandaan je twee "spitsen" kunt zien.

We gaan nu de stelling van de bewaakte polygoon bewijzen door eerst te bewijzen dat je de hoekpunten van een polygoon op zo een manier kan kleuren, dat geen aangrenzende hoekpunten dezelfde kleur delen (Zie fig. 7).

De eerste driehoek van een polygoon heeft drie verschillende kleuren. Het heeft ook tenminste een verbinding met een andere driehoek. Door deze verbinding delen de twee driehoeken ook twee hoekpunten. Het derde punt van de nieuwe driehoek heeft dus uiteraard de ontbrekende kleur. Zo kan je doorgaan tot de polygoon volledig gekleurd is, zolang je geen reeds gekleurde punten tegenkomt. Maar dit kan sowieso niet: De rand van een polygoon is een onafgebroken lijn, dus er kan onmogelijk een "lus" zijn waardoor het niet uitkomt.

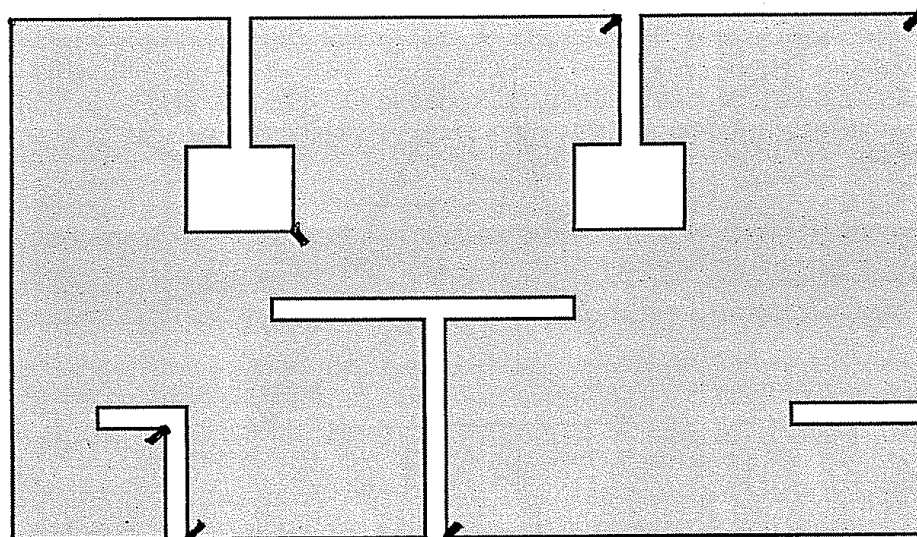
De minst voorkomende kleur komt maximaal  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  keer voor, want als het groter zou zijn dan zou de totale hoeveelheid kleuren groter dan de totale hoeveelheid hoekpunten zijn.

Nu gaan we weer over camera's denken. Omdat elke driehoek elke kleur bevat, is het dus efficiënt om een camera bij elke minst gebruikte kleur te zetten. De minst gebruikte kleur komt maximaal  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  keer voor, en dat is dus de hoeveelheid camera's die we maximaal nodig hebben.

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  is de eerstvolgende gehele waarde die groter is dan  $\frac{1}{3}n - 1$ , en dat komt overeen met onze stelling.

*En wat dacht je van de camera's?*

Het meest voorkomende antwoord dat we tegenkwamen is 6 of 7 camera's. Hieronder de oplossing van het winnende team.



## 6. Ervaringen uit de praktijk

Sinds 2005 nemen Vlaamse scholen deel aan de Wiskunde B-dag. Het aantal stijgt elk jaar een beetje. In 2006 leverde Vlaanderen met een ploeg uit het H. Drievuldigheidscollege uit Leuven het winnende werk.



Winnaars van 2006

In wat volgt geven we een bundeling van verhalen die we opvingen van deelnemende scholen uit de vorige edities.

### a. Voorbereiden op schoolniveau

#### *Inplannen in het schooljaar*

Gezien de wiskunde B dag een engagement vraagt van alle leerkrachten van het zesde jaar of de derde graad, is het belangrijk om tijdig te plannen. Ideaal is dat men de deelname opneemt in de jaarkalender. Het gewone lesprogramma wordt immers overhoop gehaald. In een aantal scholen biedt men aan de leerlingen op deze dag een programma aan volgens hun stamvakken. Op onze school ontstond op deze manier een talen-wiskunde-dag: leerlingen met als stamvak 'Moderne talen' hebben op school een programma rond alle vreemde talen die ze leren, terwijl de leerlingen met wiskunde als stamvak deelnemen aan de wiskunde B-dag. Van 'gewone lessen' is er op die dag voor het zesde jaar geen sprake. Een initiatief dat kan ontstaan als je aan een tweede of volgende deelname toe bent.

Misschien zijn er scholen die het initiatief leren kennen nadat de hele planning van het schooljaar rond is. Eind november is voor de Vlaamse scholen erg dicht bij de examens, een moment dat de leerkrachten niet graag een les missen. Een mogelijkheid bestaat erin om een alternatief lessenrooster uit te werken zodat leerkrachten hun les op een ander moment kunnen geven... de wiskunde leraar staat een aantal lessen uit de bewuste novemberweek af aan zijn collega's van de andere vakken.

#### *Werken in één lokaal, meerdere lokalen, thuis...*

Waar de leerlingen precies werken gedurende de dag, hangt erg af van de beschikbare lokalen per school. Belangrijk is dat leerlingen gedurende de hele dag op één plek kunnen werken. Verschillende scholen kiezen voor een eigen lokaal per groepje leerlingen. Dit vraagt soms een alternatief lokalenrooster voor een aantal andere klassen. Het is ook mogelijk de leerlingen thuis te laten werken. Het nadeel hiervan is dat je de leerlingen niet kan oppeppen als ze in een dipje zitten. Het

groepsgevoel op zo'n dag is niet te onderschatten en wordt ondermijnt als niet iedereen op dezelfde locatie werkt.

De meeste scholen stellen een PC lokaal ter beschikking van de leerlingen. Hoe langer hoe meer leerlingen beschikken over een eigen laptop. Het is handig als één leerling per groepje een eigen computer of laptop meebrengt.



### *Leerkrachten waken over leerlingen*

Niet in alle scholen wordt er gedurende de hele dag toezicht georganiseerd. Daar waar het wel gebeurt, schakelt men ook andere leerkrachten in. Men heeft met dit laatste positieve ervaringen.

## **b. Voorbereiden op leerlingenniveau**

### *Welke leerlingen nemen deel en met wie?*

In sommige scholen werkt men met vrijwilligers. De gewone lessen lopen door en de leerlingen die aan de wiskunde b dag deelnemen moeten deze lessen inhalen. In andere scholen is deelname verplicht en vormt het geleverde werk een onderdeel van het persoonlijk werk van de leerling of van het examen.

In de meeste scholen werkt men enkel met leerlingen die het sterke pakket wiskunde volgen met minimaal 6u. Of men deelneemt met enkel het zesde jaar of ook met het vijfde jaar is wisselend.

De leerlingen werken in groepjes van 3 à 4 personen aan de opgave. In de meeste scholen kiezen ze deze groepen vrij eventueel over de klassen heen. Een vrije keuze door de leerlingen vraagt het nodige 'oogje in het zeil' om de enkelingen ervoor te behoeden dat ze bij geen enkel groepje aansluiten. In sommige scholen deelt de leerkracht de groepen vooraf in en houdt hierbij rekening met sterke en minder sterke leerlingen. De ervaringen hiermee zijn wisselend: in een aantal groepen werkt dit zeer goed, in andere kregen de zwakkere leerlingen al snel de rol van 'typiste'.

### *Een omvangrijke opdracht met een verslag*

De leerlingen krijgen een opdracht en moeten hierover verslag uitbrengen. De organisatie moedigt een doorlopend verslag aan. Het moet leesbaar en begrijpbaar zijn voor elke medeleerling of lezer die de opgave vooraf niet heeft doorgenomen. Hoewel dit duidelijk in de opdracht vermeld staat, merken we dat de richtlijn niet altijd gevolgd wordt. Het kan samenhangen met de opgave zelf. Deze worden meestal aangeboden met vragen. Hierdoor heeft de deelnemer de neiging om de vragen gewoon te beantwoorden. In de opgave van de Polygonen merken we dat meer groepen de verslagvorm hanteren. In de opgave werd echter duidelijk gesteld:

De delen C en F zijn onderling verbonden (met de onderzoeksvragen 1 en 4). **De beantwoording van deze twee onderzoeksvragen vormen de kern van je verslag.** Weinig of geen aandacht voor deze twee onderwerpen in je verslag kan dus niet!

Zowel de open vragen als het maken van een doorlopend verslag zijn vaardigheden die binnen het traditionele wiskunde onderwijs minder of helemaal niet aan bod komen.

Hoewel het maken van een goed verslag zeker in andere vakken aan bod komt, merken we dat leerlingen niet automatisch het aangeleerde gebruiken en toepassen wanneer ze een wiskundig verslag moeten maken. Een mooi titelblad, een inleiding, een duidelijke structuur, een mooie lay out, eventueel een voettekst, gebruik van volzinnen, paginanummering... aandachtspunten die zeker in de lessen Nederlands gegeven worden, lijken mijlen ver weg als men een wiskundig werkstuk maakt.

### *Leerlingen voorbereiden op opdracht en verslag*

Leerlingen laten werken op een heel open vraag kost tijd. Vaak is één lesuur te kort om tot een zinnig antwoord te komen. En houd je als leerkracht dan maar eens in om niet net die cruciale vraag te stellen die eigenlijk onderzoeksvaardige jongeren zelf moeten leren stellen.

Via kleinere opdrachten al dan niet aansluitend bij de leerstof, kan je leerlingen vanaf het vijfde jaar al vertrouwd maken met de beide bovenstaande elementen. In wat volgt geef ik een voorbeeld van mijn eigen aanpak tijdens het vorige schooljaar in het zesde jaar. Deze is geïnspireerd op het verhaal van Hilde Eggermont.

*Mijn allereerste wiskunde les* van het schooljaar gaf ik de leerlingen in kleine groepjes een aantal opdrachten die me toelieten een overzicht te geven van de leerstof van het schooljaar. Ze kregen o.a. een A4-tje, schaar en lijm en moesten 'de grootste open doos' maken. Op elke tafel had ik een stip aangebracht. Ze kregen pareltjes die ze zo dienden te leggen dat elk pareltje even ver van de stip als van de rand van de tafel lag. De kaarttruc uit het spinnenweb van Uitwiskeling 14 n°4 deed ik live en de leerlingen moesten het geheim van de truc achterhalen. Vermits het de eerste les na de vakantie was, zat de parate kennis een beetje verder weg en werd door enkele groepen zelfs de oefening van de grootste doos als nieuw ervaren. Misschien ook omdat ze praktisch aan het werk moesten. Als ik me tussen de groepen bewoog, was ik in alle geval aangenaam verrast dat er heel wat wiskundig denkwerk verricht werd: er werd getekend, er werd kritisch nagedacht, er werden voorbeelden en tegenvoorbeelden gezocht, kortom er werd 'onderzoeksvaardig nagedacht' en ik heb de groepen vooral erop gewezen waar ze goed aan het redeneren en denken waren!

Halfweg september kreeg onze school bezoek van de directeur van een school uit Zuid Afrika. We trachten met hen een samenwerking op te zetten. Hij had op mijn verzoek wat materiaal vanuit het wiskundedepartement mee. Blijkbaar is het idee 'Onderzoek' ook daar doorgedrongen tot in de leerplannen. Ik kreeg een opdracht van mijn Zuid Afrikaanse collega 'Graad 12 Onderzoek: Die Koch-sneeuwvlokke'. Enkele vragen uit de opdracht: 'Narmate die sye al korter en korter raak, wat gebeur met die omtrek? Verduidelik.' Of 'Die verskil tussen die omtrek en die oppervlak van die Koch-sneeuwvlokke narmate  $n \rightarrow \infty$  is baie interessant. Lewer kommentaar op hierdie verskil.' Hoewel deze vraagstelling nog vrij gesloten is, vormt het toch *een goede eerste aanzet* om de leerlingen een opdracht te laten maken met als resultaat een doorlopend verslag. Ze krijgen de opdracht en moeten deze thuis voorbereiden. Vervolgens krijgen ze tijdens de les de tijd om met een groepje te overleggen en een verslag te schrijven op de PC. Ieder van het groepje moet een stukje van het verslag intypen, dit doorsturen naar de eindverantwoordelijke die het samenvoegt tot één geheel. Tijdens dit lesuur komt ook de vergelijkingseditor aan bod. Het verslag moet voldoen aan een aantal normen m.b.t. de lay out, het maximaal aantal bladzijden en de eis dat de vraagjes niet zomaar beantwoord mogen worden. Bij het verbeteren gaf ik een grondige feedback op de wiskundige juistheid maar ook op het verslag zelf. De werkjes zelf werden doorgestuurd naar de 'Waveren Hoërskool' in Witzenberg Zuid Afrika, dit moest hen motiveren om het geheel degelijk uit te typen. Hoewel het geen vereiste is merken we dat heel wat van de werken van de wiskunde b dag die we onder ogen kregen getypt zijn. En toegegeven... het oogt mooier.

*De tweede opdracht* die de leerlingen kregen, is er één die aansluit bij het verloop van exponentiële en logaritmische functies. We lieten hen zelf de hyperbolische functies in groep bestuderen met weer een

verslag als resultaat. De leerlingen kregen maximaal anderhalf lesuur de tijd om aan de opdracht te werken. Tussen het eerste (halve) lesuur en het tweede zitten een enkele dagen zodat leerlingen thuis een aantal zaken kunnen uitproberen en dit in groep in de klas bespreken.

Voor het geven van de feedback trok ik voldoende tijd uit. Ik had een klas van 25 leerlingen die in groepen van 4 à 5 aan de opdracht werken. Dit maakte dat ik 6 werkjes grondig had na te kijken. Het is alleszins meer haalbaar dan 25 werkstukjes nakijken en elke leerling apart feedback geven. De leerlingen waarderen een degelijke feedback die meer zegt dan 'goed, voldoende, uitstekend'... Je ziet de leerlingen een beetje vaardiger worden, naarmate je er met hen meer op werkt.

In onze school hebben we sinds dit jaar de volgende afspraken in de derde graad: Tijdens het eerste semester van het 5de jaar werken de leerlingen aan een aantal goede opgaven uit de VWO van voorgaande jaren. De leerlingen maken per 2 één van deze opgaven en schrijven een verslagje over hun bevindingen. Bovendien komen ze de oplossing presenteren in de klas. Elke week komt één groepje aan bod gedurende maximaal 15 min. Op dat moment moeten de andere leerlingen de opgave van het groepje dat presenteert ook gemaakt hebben.

Tijdens het tweede semester van het vijfde jaar maken de leerlingen een stukje uit de opgave van de tangle (het gedeelte waarvan je tijdens deze bijscholing kon proeven). We trekken 2 lesuren uit waarbinnen de leerlingen zich kunnen inwerken in het probleem. Ze moeten er thuis aan verder werken. Een week later krijgen de groepjes nogmaals 2 lesuren om verder te werken. De afwerking gebeurt verder thuis. De leerlingen moeten een schriftelijk verslag afgeven.

Tijdens het eerste semester van het 6de jaar doen we een gelijkaardige oefening met een stukje uit de opgave van de slakken (Wiskunde B-dag 2008): 2 lesuren inwerken, thuis verder werken, 2 lesuren verwerking en thuis afwerken. Tenslotte nemen we deel aan de wiskunde B-dag, al dan niet de wedstrijd. Dit schooljaar hebben we onze eigen wiskunde B dag georganiseerd op 21 januari. We gebruikten de opgave van de polygonen. Op dit moment zijn we de werken van onze leerlingen aan het verbeteren.

*Ten slotte...* Het werken aan onderzoekscompetenties start het best vanaf het eerste jaar. In nummer 24/4 van Uitwiskeling kan je lezen hoe men met kleine opdrachten leerlingen aan onderzoeksvaardigheden kan laten werken vanaf het eerste jaar.

### *Leerlingen voorbereiden op de praktische kant*

Kort voor de Wiskunde B-dag zelf, is het interessant om de praktische kant van de dag even te overlopen, de leerlingen wat werkjes te tonen van vorige jaren en hen eventueel wat tips te geven. Enkele voorbeelden:

- Begin tijdig aan je verslag – ten laatste vanaf de middag maar beter nog - al na een tweetal uur.
- Wijzen op het belang van een goed verslag dat helder leesbaar is. Het is niet altijd eenvoudig om in iemands redenering te komen, voor de beoordelaars is het erg belangrijk dat de stappen voldoende uitgewerkt en toegelicht zijn.
- Wijzen op het belang van goed samenwerken, alle ideeën van iedereen goed overwegen
- Duidelijk maken dat de leerkracht tijdens de dag niet mag helpen
- Opgaven en deeltaken hangen nauw samen. Het is vaak geen goed idee om zomaar in het wilde weg stukken van de opdracht te verdelen zonder het eerst allemaal grondig gelezen te hebben.
- Schrijven gaat sneller, typen oogt mooier en biedt meer mogelijkheden tot lay out, stukjes verplaatsen...
- Het praktische werk kan wel verdeeld worden: Wie start met typen? Wie zoekt wat illustraties? Moet er gescand worden? Moet er getekend worden? Moet er iets netjes geschreven worden?

- Blijf niet oneindig lang op één vraag of probleem zoeken. Leg het desnoods even opzij en start met het volgende. Indien de tijd het toelaat kan je het later op de dag terug oppakken met misschien wel nieuwe inzichten.
- Maak alles voldoende concreet: maak tekeningen, zoek eenvoudiger voorbeelden...

Sommige scholen geven vooraf een brief mee zodat de leerlingen vooraf de nodige richtlijnen en afspraken kunnen doornemen. Een voorbeeld van zo'n brief vind je in bijlage 4.

### **c. De Wiskunde B-dag... aan de slag**

De leerlingen krijgen 7u tijd om aan de opdracht te werken. De wedstrijd loopt van 9u tot 16u. Afhankelijk van de gewone schooluren, kan je hier een kleine wijziging doorvoeren. Bv. Leerlingen komen naar één lokaal om de opgaven in ontvangst te nemen om 8u25 en starten met de wedstrijd om 8u40.

Vooraf moet duidelijk afgesproken zijn of leerlingen heel de dag in het lokaal kunnen blijven en er bijgevolg ook eten of niet.

De leerkracht heeft enkel de taak om z'n teams gemotiveerd te houden. Hulp bieden is uit den boze. Tips m.b.t. de manier waarop de opdracht wordt aangepakt, de taken worden verdeeld e.d. kunnen wel. In de voormiddag koffie- en thee schenken met een koekje, in de namiddag een frisdrank met wat chips... de leerlingen ervaren dit als heel aangenaam.

De sfeer op de dag is doorgaans goed. Leerlingen zijn enthousiast en werken hard... alhoewel er al eens een kaartend groepje ontdekt wordt! Reken erop dat elk groepje ergens op de dag wel een dipje heeft en dat je ze een opkikkertje dient te geven.

Op het einde moeten de verslagen ten laatste om 15u40 afgeprint bij de leerkracht liggen. In scholen met een elektronisch leerplatform, moeten ze om 15u40 in de juiste map geplaatst zijn.

## **7. De opdracht en het resultaat**

### **a. Hoe wordt de opdracht ontworpen?**

Tijdens een weekend in september gebeurt een brainstorm in groep van vrijdagmiddag tot zaterdagmiddag. Individueel wordt door elk groepslid verder gedacht. Opvallend in dit proces is dat ook bij het zoeken en verder denken de wegen al snel uit elkaar lopen. Iedereen begint eigen methodes te ontwikkelen.

Een beperkte groep van de organisatie op het Freudenthal Instituut is verantwoordelijk voor het afwerken van de uiteindelijke opdracht. De opgave gaat de wereld in zonder dat alle oplossingen gevonden zijn.

### **b. Omvang**

De opdracht is steeds omvangrijk. Het is erg zwaar om deze in één dag te doorworstelen. Slechts weinig leerlingenteams slagen erin om de hele opdracht tot een goed einde te brengen. Toch staat men er telkens van verast hoever sommige teams in één dag geraken.



### **c. Niveau van het geleverde werk**

Hierover zijn de meningen enorm verdeeld. Je hebt erg slechte werkjes, uitstekende werkjes en alles wat er tussen is. Je mening kan ook variëren naargelang het tijdstip dat je het werk bekijkt of de manier waarop je ernaar kijkt. Een goede eerste indruk, kan minderen naarmate je je meer in het werk verdiept. Maar evenzo kan een slechte eerste indruk verbeteren.

Algemeen merken we dat leerlingen het moeilijk hebben om tot veralgemeningen te komen. Veel groepen kijken daarenboven onvoldoende kritisch naar een gevonden resultaat. Het zelf ten gronde bewijzen van een vermoeden, is een vaardigheid die de meeste leerlingen onvoldoende ontwikkeld hebben. Je merkt wel een grote verscheidenheid in de aanpak van leerlingen en de wiskundige wegen die gevolgd worden. Een opmerking van een tevreden wiskundeleerkracht:

*‘Als alle werkjes van de zes groepen zouden samen gelegd worden en goed geredigeerd, dan heb je een heel stevige studie.’*

### **d. Nabespreking**

Het wedstrijdelement stopt om 16u van de wiskunde B-dag. Niets belet leerlingen natuurlijk om nadien nog verder te werken in of buiten de les. Voor Vlaanderen is de timing voor verder werken tijdens lessen echter minder geschikt.

Een grondige nabespreking met de leerlingen komt in het gedrang bij elke leerkracht die de druk van de examens in zijn nek voelt. Sommige leerkrachten geven geen feedback na de wedstrijd. Andere leerkrachten geven per groepje een schriftelijke feedback en eventueel een individuele bespreking na het examen. Tenslotte kan men ook in januari nog een les aan de nabespreking besteden. De ervaring leert echter dat de interesse van de leerlingen dan al heel wat minder is. Het vraagt hen veel energie om in de opgave te komen.

## **8. De evaluatie**

De organisatoren geven soms een beoordelingshulp. Dit is echter niet standaard. Vaak wijken leerlingen trouwens af van ‘standaard antwoorden’. De tijdsdruk laat het niet altijd toe om de werken grondig na te rekenen op correctheid. Werken van de leerlingen brengen je vaak op ideeën en als je je laat gaan, is een dag zo voorbij gevlogen. Het is vaak moeilijk om snel te beoordelen of alle formules van leerlingen correct zijn vandaar ook de noodzaak voor een helder verslag. Het is de verantwoordelijkheid van de leerlingen om na rekenen overbodig te maken door een goed geschreven verslag waarin alle stappen en overgangen grondig worden uitgelegd. Dit is een moeilijk punt... menig wiskunde leerkracht zal zich niet kunnen inhouden om na te rekenen, mee te denken met de redenering van de leerlingen om zeker te zijn of ze wel juist is of niet...

### **a. Op school**

De evaluatie op school is tweërlei. Eerst en vooral beoordeel je de werkjes van je leerlingen met het oog op een feedback naar je leerlinge, een cijfer voor een taak, een test, een examenonderdeel... Ten tweede maak je een keuze met het oog op de wedstrijd. Afhankelijk van het aantal deelnemende leerlingen kan je werkjes opsturen. Als je minder dan 10 teams op school hebt, kan je één werk insturen, bij minstens 10 teams kan je er twee insturen. In de school zelf gebeurt de eerste selectie. Het team van wiskundeleerkrachten selecteert de werkjes die meedingen naar de eerste prijs van de wedstrijd.

Verschillende mensen hebben niet altijd dezelfde mening over de kwaliteit van een werk. Daarom is het belangrijk om dit in teamverband te doen. Je kan stellen dat om de subjectiviteit van het

beoordelen te bewaken, minstens twee leerkrachten elk werk moeten lezen en beoordelen. De leerkrachten beoordelen de werkjes individueel en zitten dan samen om een eindcijfer of eindrangschikking te bepalen. Dit kan uiteraard enkel in scholen die groot genoeg zijn.

Het is belangrijk hiervoor vooraf criteria af te spreken, deze kunnen verschillen naargelang de opgave.

Een aantal voorbeelden:

1. De werken worden gerangschikt volgens kwaliteit. Mogelijke criteria:
  - Aantal correct opgeloste vragen
  - Originaliteit van de oplossingsmethode
  - Heldere verklaring van de opgestelde formules en gebruikte methoden
  - Gebruikte wiskunde is zinvol en correct
  - Structuur en samenhang (goede opbouw)
  - Stijl en grammaticale correctheid
  - Lay out en vormgeving (totaalindruk bij het doorbladeren)
  - Ondersteuning van tekst met zinvolle illustraties
2. Een punt op 20 wordt toegekend volgens de volgende criteria:
  - 5: lay out, structuur en vorm van het verslag
  - 5: helder opgebouwde redeneringen
  - 5: wiskundige inhoud en correctheid
  - 5: volume van uitgevoerde werk
3. Een punt op 20 wordt toegekend volgens de volgende criteria:
  - 10: wiskundige redeneringen
  - 2: volledigheid
  - 3: algemene inhoud
  - 2: structuur en lay out
  - 2: wiskundige en Nederlandse taal
  - 1: illustraties

Verder wordt de samenwerking en medewerking beoordeeld door de groepsleden zelf via een groepeerbeoordelingsformulier. Items die aan bod komen:

- De leerling denkt actief mee om de opdracht te verduidelijken en te analyseren
  - De leerling discussieert mee over de goede aanpak van de opdracht
  - De leerling doet opzoekingswerk
  - De leerling legt zijn opzoekingen en/of ideeën duidelijk uit
  - De leerling luistert naar de anderen binnen de groep
  - De leerling is bereid zich te verdiepen in alle aspecten van de opdracht
  - De leerling heeft oog voor het geheel
  - De leerling werkt op een constructieve manier samen
  - De leerling doet aanpassingen na kritische reflecties van andere leden van de groep
4. Men stelt vooraf een beoordelingsformulier op dat bij de opgave aansluit. Men hanteert dit om de werken te rangschikken. In bijlage 5 vind je een voorbeeld bij de opgave van 2002.

## b. Februari

In deze maand verwacht de organisatie nog een serieuze inspanning van de leerkrachten. Je krijgt tussen de 5 en 7 werkjes toegestuurd, die moet je rangschikken van goed naar minder goed. Het is deze rangschikking die de einduitslag per poule mee bepaalt. Een woordje meer uitleg.

De deelnemende werkjes worden over een aantal poules verdeeld. In 2005 zaten de Vlaamse scholen her en der verspreid over de poules. In 2006 was er precies één Vlaamse poule. In 2007 was er één volledig Vlaamse poule en één gemengde Vlaams - Nederlandse poule. In de loop van januari krijgt elke deelnemende school een zestal werkjes uit één en dezelfde andere poule. Bv. onze werkjes zitten in poule F en wij krijgen werkjes van poule E. Elke werkje komt op deze manier in 4 groepjes van werken uit de eigen poule terecht en wordt bijgevolg door 4 verschillende teams van leerkrachten beoordeeld t.o.v. de andere werken in het groepje. In de onderstaande tabel vindt u een voorbeeld waarbij de 13 teams van leerkrachten uit de ene poule (schoolnummers in de eerste rij van de tabel) telkens 6 of 7 werkjes uit een ander poule (nummers van de werkjes per kolom) ontvingen.

| 1013   | 1006  | 11384 | 493   | 842   | 1564  | 1290   | 802    | 380    | 835   | 2678   | 682    | 1023   |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| 1454A  | 1454A | 1454A | 1454A | 1454B | 1454B | 1454B  | 663A   | 663A   | 663B  | 1113B  | 11949A | 11949B |
| 1454B  | 663A  | 663B  | 1113A | 663A  | 663B  | 1113A  | 663B   | 1113A  | 1113A | 1489A  | 1193A  | 1139B  |
| 11949A | 1489B | 1489A | 1113B | 1113B | 1489A | 1489B  | 1489B  | 1489A  | 1113B | 1489B  | 1193B  | 672    |
| 11949B | 1193A | 1193B | 1139A | 1193B | 1139A | 11949A | 11949A | 11949B | 1193A | 11949B | 1139A  | 1084   |
| 1084   | 672   | 1129  | 1139B | 1193A | 1139B | 1129   | 1139B  | 1139A  | 672   | 1193B  | 1129   | 1159A  |
| 1096   | 1084  | 1159A | 1096  | 1159A | 1084  | 1159A  | 1129   | 1096   | 1096  | 672    | 1159B  | 1159B  |
|        |       |       | 1159B |       |       |        |        | 1159B  |       |        |        |        |

De leerkrachten geven hun rangschikking door. Op deze manier krijgt elk werkje een cijfer. Een werk dat door 4 teams van leerkrachten op de eerste plaats komt, krijgt een 4. Een werk dat op 1, 2 maal op 3 en eenmaal op 6 geplaatst wordt, krijgt een 13. Bij het analyseren van de uitslagen merkten we zowel eensgezindheid over de rangschikking als onenigheid: sommige werkjes krijgen van alle teams een hoge rangschikking, andere van alle teams een lage. Er zijn echter ook werkjes waar de meningen verdeeld zijn. Dit kan van de andere werkjes in het groepje afhangen maar ook van de beoordeling van het leerkrachtenteam.

Uit deze rangschikking door de leerkrachtenteams volgt een rangschikking per poule. Hieruit worden 10 teams geselecteerd die meedingen naar de eerste prijs. In 2007 waren dat de eerste teams van elke poule en de 3 beste tweedes. Zit je met je team toevallig in een sterke poel dan kan je werk eindigen op een derde plaats maar beter zijn dan de eerste plaats uit een andere poule. De machten van het toeval spelen ook in de wedstrijd een kleine rol.

Voor deze poule vind je de eindrangschikking hieronder. Het team 1159A ging naar de eindronde. Team 663A speelde niet mee in de eindronde. Het werd niet geselecteerd als betere tweede in vergelijking tot de andere poules.

|          |          |           |            |           |
|----------|----------|-----------|------------|-----------|
| 1. 1159A | 5. 1113A | 6. 1193A  | 12. 11949B | 17. 1489A |
| 2. 663A  | 6. 663B  | 10. 1096A | 14. 11949A | 18. 1139A |
| 3. 1193B | 6. 1084A | 11. 1113B | 14. 1454B  | 19. 1159B |
| 4. 1139A | 6. 1129A | 12. 1454A | 14. 1489B  | 19. 672A  |

Belangrijk voor deze fase is: 'Werkjes sorteren is gemakkelijker dan punten geven!'

## c. De Jury

De jury doet een vergelijkbare oefening waaruit de einduitslag volgt. In de onderstaande tabel vind je de eindbeoordeling van een opgave uit de vorige jaren.

| J1     | J2  | J3    | J4    | J5  | J6    | Gemiddeld         | Voorstel  |
|--------|-----|-------|-------|-----|-------|-------------------|-----------|
| 209... | 103 | 209.. | 209.. | 672 | 11970 | 209... : 15/6=2.5 | 1: 209... |

|       |        |       |       |        |         |                 |          |
|-------|--------|-------|-------|--------|---------|-----------------|----------|
| 90    | 672    | 672   | 103   | 90     | 672     | 90: 18/6=3      | 2: 672   |
| 11970 | 90     | 90    | 672   | 209... | 90      | 11970: 18/5=3.6 | 3: 90    |
| 103   | 209... | 11970 | 11970 | 103    | 1064    | 103: 25/6=4.2   | 4: 11970 |
| 1966  | 1564   | 1564  | 90    |        | 209.... | 1966: 31/5=6.2  | 5: 103   |
| 672   | 11970  | 1966  | 1966  |        | 103     | 672: 16/6=2.7   | 6: 1966  |
| 663   | 1966   | 1064  | 1564  |        | 1966    | 663: 42/5=8.4   | 7: 1564  |
| 1064  | 1064   | 103   | 1064  |        | 663     | 1064: 35/5=7    | 8: 1064  |
| 1564  | 663    | 663   | 663   |        | 1564    | 1564: 35/5=7    | 9: 663   |
| 680   | 680    | 680   | 680   |        | 680     | 680: 50/5=10    | 10: 680  |

Je merkt dat ook de jury niet altijd eensgezind is over de kwaliteit. Het is al gebeurd dat de winnaar van één jaar bij één jurylid op de tiende plaats stond.

Team 209... kwam als winnaar uit de bus. Deze einduitslag verschijnt op <http://www.fi.uu.nl/wisbdag/> met een woordje uitleg.

*Een voorbeeld van 2006*

## Juryrapport

Het team van het Heilig Drievuldigheidscollege heeft een zeer goede prestatie geleverd. Het werkstuk geeft een goede afwisseling van beschrijvingen in woorden en algebraïsche berekeningen. Daarbij worden ook illustraties functioneel gebruikt om een en ander toe te lichten.

Soms komen de formules uit de lucht vallen en was het beter geweest als die waren toegelicht. Ook worden gevonden resultaten niet altijd omgezet in echte minuten en seconden.

Daar staat tegenover dat er met inzicht wordt gewerkt. Dat blijkt eigenlijk bij alle delen. Afhankelijk van de probleemstelling wordt gewerkt met de stand van de wijzers in graden of met afgelegde rondes van de wijzers. Met name bij deel D wordt heel direct vanuit formules geredeneerd. Een uitgebreide behandeling van D3, die niet altijd volledig correct is, wordt vervolgens gebruikt om het speciale geval van D2 te analyseren.

Het team verdient daarmee terecht de eerste plaats van de Wiskunde B-dag 2006!

### d. En wat wordt er gewonnen?

De eer van het winnen, een zebraboekje, een medaille...

## **e. Een internationale wedstrijd**

Aan de wedstrijd doen teams uit Nederland, Vlaanderen en Duitsland mee. Over de landen heen merk je dat er evolutie is als je langer meedoet. De Nederlanders communiceren beter en koppelen hun antwoorden beter terug naar de realiteit. Het hanteren van algebra is echter zwakker en ze gebruiken nauwelijks formules. De Vlamingen zijn dan weer sterker in algebra en het hanteren van formules. In Duitsland is de wiskunde van een erg hoog niveau maar is men minder bedreven in het schrijven van een goed verslag. In Duitsland wordt de wedstrijd een stuk autonomer georganiseerd omwille van de taal. Zij hebben een eigen organisatie die de twee beste werken indient voor de wedstrijd.

### **Bibliografie**

- [1] Regi Op de Beeck, Luc Van den Broeck, Els Van Emelen, *Kleine opdrachten, grote vaardigheden: onderzoekscompetenties van 1 tot 6*, Uitwiskeling 24/4 (winter 2009), 28-53.
- [2] Website Wiskunde B-dag, <http://www.fi.uu.nl/wisbdag/>
- [3] Hilde Eggermont, *De wiskunde-B-dag: een verslag*, Uitwiskeling 23/2 (lente 2008), 5-8.

# Bijlagen

1. Opgave Wiskunde B-dag 2003
2. Werkstuk uit 2006
3. Werkstuk uit 2007
4. Voorbeeldbrief voor de leerlingen
5. Voorbeeld van een beoordelingsformulier

# Wiskundig door de Bocht



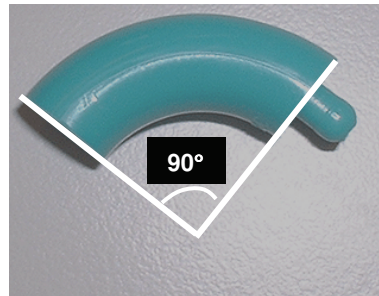


## Inleiding

Soms dringt wiskunde zich spontaan op, bijvoorbeeld in een stukje speelgoed. Je hoeft het alleen maar ter hand te nemen om uren te construeren en aan de hand daarvan te redeneren en te rekenen.

Vandaag gaan we dat doen aan de hand van een setje zogenaamde "*elleboogjes*".

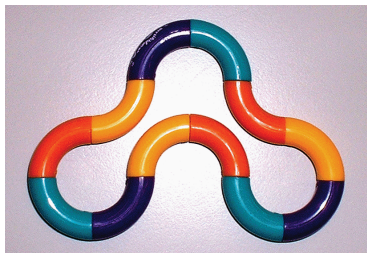
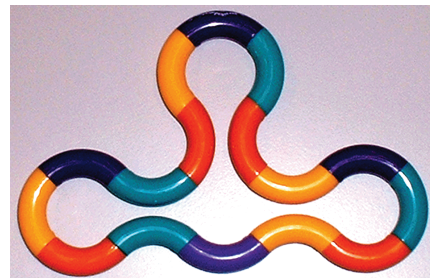
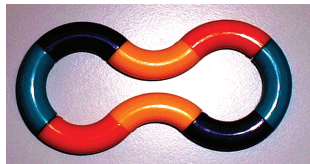
Een elleboogje is een kwartcirkel. Met één klik kunnen de elleboogjes worden geschakeld.



We bekijken alleen gesloten schakelingen van elleboogjes (dus zonder begin- en eindpunt). Zo'n gesloten schakeling noemen we een *circuit*.

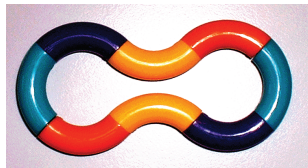
Onderstaande foto's tonen een aantal voorbeelden van circuits. Je ziet vier *vlakke* circuits, bestaande uit 8, 12, 16 en 28 elleboogjes: ze kunnen plat op tafel worden gelegd.

Maar linksonder is ook een *ruimtelijk* circuit gegeven met 7 elleboogjes. Deze vorm kan niet plat op tafel gelegd worden.



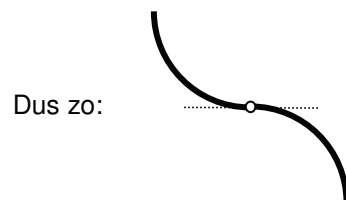


We noemen een circuit dus alleen vlak als alle elleboogjes van het circuit in hun geheel plat op tafel liggen. Om misverstanden te voorkomen: de twee onderstaande foto's tonen twee circuits met 8 elleboogjes. Links is sprake van een vlak circuit; rechts ligt het circuit niet in zijn geheel plat op tafel en daarom is het dus niet vlak.

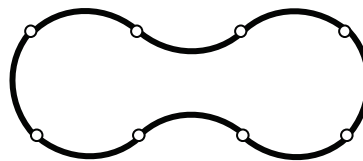
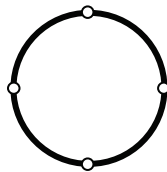


### **Wiskundige representaties van elleboogjes.**

De elleboogjes kunnen we wiskundig representeren als kwartcirkels met straal 1. Bij deze wiskundige weergave verwaarlozen we de dikte van het materiaal van de elleboogjes. In de verbindingen zitten de kwartcirkels met hun eindpunten aan elkaar en hebben daar een gezamenlijke raaklijn.



Hieronder zijn twee vlakke circuits, met 4 resp. 8 elleboogjes, op deze manier weergegeven.



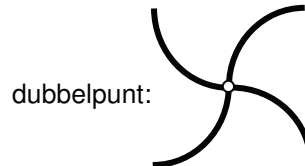
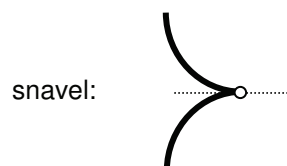
Soms lijkt een *plastic* circuit wel te kunnen (met een beetje wringen), maar als je het op bovenstaande wijze met kwartcirkels probeert weer te geven, blijkt het *wiskundig* gezien niet mogelijk. Wij zullen dat dan niet als "circuit" erkennen.

De raaklijneigenschap van de wiskundige representatie betekent voor de concrete elleboogjes: van twee geschakelde elleboogjes sluiten de grensvlakken naadloos op elkaar aan.

Een wiskundige omschrijving van een circuit van  $n$  elleboogjes luidt dus:

**Een  $n$ -circuit is een gesloten kromme, bestaande uit  $n$  kwartcirkels die in alle verbindingspunten steeds een gezamenlijke raaklijn hebben.**

Het lijkt overbodig (omdat de elleboogjes het niet toelaten), maar wiskundig moet het nog worden uitgesloten: in een gesloten kromme staan we geen 'snavel' toe en ook geen dubbelpunten.



## De Opgave

Bij deze Wiskunde B-dag ga je op zoek naar mogelijkheden en onmogelijkheden van vlakke en ruimtelijke circuits van elleboogjes en eigenschappen daarvan. Het setje van 18 elleboogjes is bedoeld om daadwerkelijk constructies uit te voeren die het denken en redeneren over circuits in algemene zin (dus ook voor circuits met meer dan 18 elleboogjes) kunnen ondersteunen.

De opdracht is gesplitst in 3 delen.

In deel A worden de vlakke circuits onderzocht. In deel B worden ruimtelijke circuits bekeken die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen; je krijgt daar dus maar beperkt de ruimte. Daarna krijg je in deel C de volledig vrije ruimte.

De genummerde vragen in de delen A, B en C zijn bedoeld om richting te geven aan je onderzoekingen. Ze hoeven niet in de gegeven volgorde bekeken te worden; het werk daaraan kan ook worden verdeeld binnen de groep.

In elk deel worden ook algemene vragen gesteld. Dat zijn de onderzoeksvragen waarmee je jezelf kunt onderscheiden van anderen in wiskundige diepgang en volledigheid.

## Eindopdracht

Van je bevindingen in de delen A, B en C maak je een zelfstandig leesbaar werkstuk. Dit houdt in dat een lezer, die zelf beschikt over een setje elleboogjes, aan de hand van je verslag duidelijk zicht krijgt op de mogelijkheden, onmogelijkheden en eigenschappen van vlakke en ruimtelijke circuits.

In het verslag speelt de volgorde van de vragen zoals ze in deze Wiskunde B-dag opdracht zijn gezet geen enkele rol. Zorg er wel voor dat je bevindingen bij de verschillende vragen aan bod komen, maar voorkom dat je verslag alleen maar een beantwoording is van de afzonderlijke vragen.

### ***Belangrijk!!***

Het verslag moet **geprint** worden of met **zwarte pen** geschreven zijn, in verband met het kopiëren. Als je in je verslag figuren opneemt, moeten deze ook geprint zijn of met zwarte pen gemaakt. Als je een digitale camera hebt, kan het aantrekkelijk zijn om foto's van circuits op te nemen in het verslag.

### ***Ten slotte:***

Bedenk dat het maken van het verslag veel tijd vergt. Het lijkt verstandig om daar ongeveer 2 uren voor te reserveren. Begin dus rond 14:00 uur met het maken er van.

*Veel plezier met je onderzoek en... maak er wat van !!*

## Deel A: Vlakke circuits

Duidelijk is dat het kleinst mogelijke vlakke circuit uit vier elleboogjes bestaat. We noemen dit een vlak 4-circuit.

### Vlakke $n$ -circuits

Een vlak  $n$ -circuit is dus een gesloten kromme zonder dubbelpunten van precies  $n$  elleboogjes, waarvan alle elleboogjes plat op tafel liggen.

In dit deel bekijken we eerst welke vlakke  $n$ -circuits mogelijk zijn.

Je hebt de beschikking over een setje van 18 echte elleboogjes om mee te experimenteren. Bedenk dat een deel van de vragen ook gaat over waarden van  $n$  die groter zijn dan 18.

1. Leg met 8 elleboogjes een vlak 8-circuit. Zijn er meerdere mogelijkheden?  
Geef ook alle mogelijkheden voor een vlak 12-circuit. Toon daarbij overtuigend aan dat je ze allemaal hebt gevonden.
2. Circuits daadwerkelijk maken is een kwestie van proberen. Daarbij zal het setje elleboogjes zeker helpen. Maar op papier communiceren over een circuit, zonder dat je daarbij steeds zo'n circuit tekent, is een ander verhaal. Bij het beantwoorden van veel vragen is het daarom nuttig om een manier te hebben waarmee je een willekeurig circuit kunt beschrijven. Dat kan op velerlei manieren. Aan jullie de taak om zelf een handige beschrijvingswijze te zoeken, waarmee je makkelijk kunt communiceren. Zorg er wel voor dat je de gekozen beschrijving precies vastlegt voor de lezer.
3. Je kunt heel wat 16-circuits maken. Bedenk een systematiek om ze allemaal te vinden en beschrijf die systematiek.
4. Met een oneven aantal elleboogjes kun je nooit een vlak circuit leggen. Leg dat uit.
5. Maak een schakeling van drie elleboogjes. De grenspunten nummeren we 0, 1, 2 en 3 zoals hier schematisch is weergegeven.



Houd nu de punten 0 en 1 (dus het eerste elleboogje) vast. Beschrijf waar de eindpunten van volgende elleboogjes 2, 3, 4, .... dan kunnen komen te liggen, inclusief de richting waarin een nieuw elleboogje in zo'n eindpunt moet aansluiten.

6. Is een vlak 6-circuit mogelijk?

*Algemene vraag I:*

Voor welke waarden van  $n$  is een vlak  $n$ -circuit mogelijk? Kun je dit ook hard maken?

### Omsloten oppervlakte van een vlak $n$ -circuit

We bekijken nu alleen de wiskundige representatie van de elleboogjes, waarbij de materiële dikte van de elleboogjes wordt verwaarloosd. Dat zijn kwartcirkels met straal 1. De omsloten oppervlakte van het 4-circuit is dus  $\pi$ .

Natuurlijk hangt de oppervlakte van een vlak  $n$ -circuit samen met de waarde van  $n$ , maar daarnaast is ook de vorm van het circuit van invloed op de omsloten oppervlakte.

7. Laat zien dat de oppervlakte binnen een vlak 8-circuit gelijk is aan  $\pi + 4$ .

Je ziet dat oppervlakte  $\pi$  en  $\pi + 4$  mogelijk zijn.

*Algemene vraag II:*

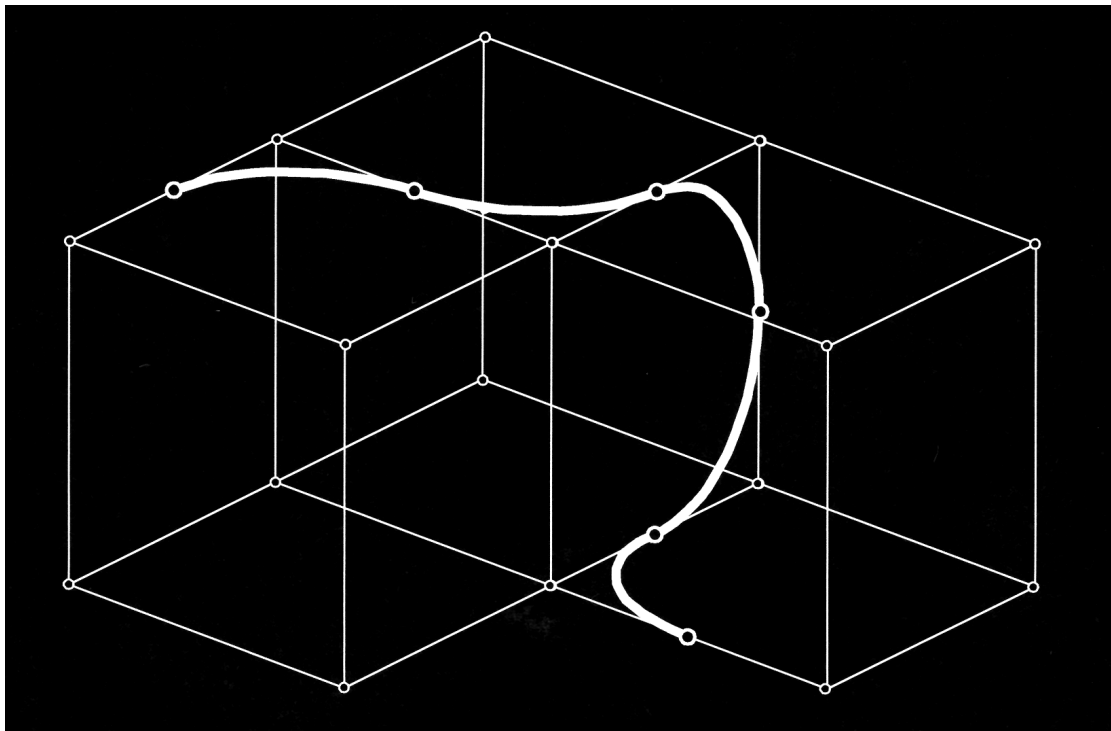
Welke oppervlaktes kunnen bij vlakke 12-, 16-, ...,  $n$ -circuits voorkomen?

## Deel B: Beperkte Ruimte

Met de elleboogjes kunnen ook ruimtelijke circuits worden gevormd. In de ruimte heb je eendeloos veel constructiemogelijkheden, omdat een elleboogje dat vast zit aan een ander in de ruimte over elke hoek kan worden gedraaid. Daarom leggen we in dit deel voorlopig een *beperking* aan de bewegingsruimte op:

De elleboogjes liggen in de vlakken van een kubisch rooster, met de eindpunten van de elleboogjes steeds op de middens van ribben van de kubussen van dat rooster.

Hieronder is een klein deel van zo'n kubisch rooster getekend, met daarin een voorbeeld van 5 geschakelde elleboogjes die aan de eis voldoen. In principe zijn de kubussen van zo'n rooster ook stapelbaar.



8. Er zijn twee verschillende ruimtelijke 6-circuits mogelijk die aan de gestelde beperking voldoen. Probeer ze te maken en beschrijf ze met behulp van het rooster. Onderzoek welke 8- en 10-circuits voldoen aan de opgelegde beperking.
9. Is het mogelijk een ruimtelijk  $n$ -circuit te maken, binnen de beperkingen van het rooster, voor oneven waarden van  $n$ ?

*Algemene vraag III*

Voor welke waarden van  $n$  is een ruimtelijk  $n$ -circuit op een kubisch rooster mogelijk?

## Deel C: De vrije ruimte

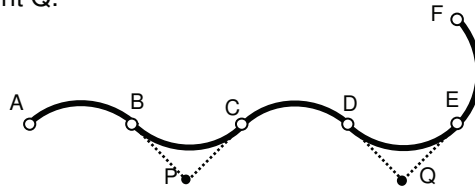
In dit deel krijg je echt vrije speelruimte. Zoals eerder is gezegd maakt dat het geheel veel complexer, omdat er zoveel bewegingsvrijheid is. Bij onbeperkte bewegingsruimte blijken ook ruimtelijke circuits mogelijk voor bepaalde oneven waarden van  $n$ .

Bij het experimenteren met de elleboogjes moet je bedenken dat het materiaal altijd wat speling toelaat. Daardoor kun je plastic circuits maken met wat wringen, die wiskundig niet als circuit mogelijk zijn. Houd je dus bij het construeren van ruimtelijke circuits aan de wiskundige beschrijving van een  $n$ -circuit zoals die in de inleiding op bladzijde 2 is gegeven.

### Een geval apart: $n = 5$

Het blijkt onmogelijk te zijn om, zonder vervorming bij de grensvlakjes, een ruimtelijk circuit te maken met 5 elleboogjes. De volgende activiteit kan wellicht helpen om een idee te krijgen *waarom* het niet mogelijk is.

Leg 5 geschakelde elleboogjes op tafel. Houd het middelste elleboogje (CD in onderstaande figuur) goed vast op zijn plaats en bekijk hoe eindpunt A in de ruimte kan bewegen door de twee elleboogjes CB en BA te draaien. Alle mogelijke posities voor punt A blijken een zelfde karaktertrek te hebben: ze liggen allemaal op een vaste afstand van het snijpunt P van de raaklijnen in B en C. Hetzelfde geldt voor alle mogelijke posities van punt F: die liggen allemaal op een vaste afstand van punt Q.



10. Toon aan dat voor alle mogelijke posities van punt A steeds geldt dat de afstand tot punt P constant is. Bereken ook die afstand.

De laatste opdracht is weer een algemene en daarbij heb je ook nog eens vrijheid van keuze. De ruimtelijke circuits geven alle aanleiding tot het jezelf vragen stellen. Mogelijke vragen:

- Kun je het idee van vraag 10 gebruiken om aannemelijk te maken dat een 5-circuit niet mogelijk is?
- Er zijn twee ruimtelijke 6-circuits. De ene is flexibel (kan in verschillende vormen worden gedraaid zonder te wringen). De andere is star en kan dus niet worden overgevoerd in een andere vorm. Hoe zit dat? Zijn er nog meer starre ruimtelijke circuits?
- Voor welke oneven waarden van  $n$  is een ruimtelijk circuit mogelijk?

Vragen van dit soort zijn beslist niet makkelijk te beantwoorden, maar wellicht kan het gericht experimenteren met het concrete materiaal je nog op goede gedachten brengen.

#### Algemene vraag IV

Doe nog wat onderzoek aan ruimtelijke vormen en probeer uitdagende problemen op het spoor te komen die met het setje ellebogen kunnen worden aangepakt. Ook als je die problemen niet zelf oplost, kun je ze in het werkstuk van de eindopdracht beschrijven.

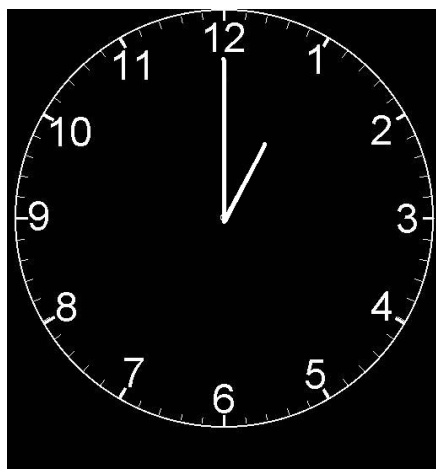
### Ten slotte:

Voer de eindopdracht uit op de manier die beschreven is op bladzijde 3. Bedenk daarbij nogmaals dat het niet de bedoeling is dat je de afzonderlijke vragen van de delen A, B en C beantwoordt. Zorg dat je een samenhangend verslag geeft van de bevindingen rond vlakke en ruimtelijke circuits en schroom zeker niet om uitdagende problemen in je verslag op te nemen.

Wiskunde B-dag  
Tussen de wijzers van de tijd

## Inleiding

Deze verhandeling staat volledig in het teken van de tijd. De tijd wordt aangegeven door een klok. Het gaat hier niet om high-tech digitale klok, maar om een gewone



wijzerklok. Een klok met een lange en een korte wijzer, een minuten- en urenwijzer. Een doodgewone klok dus. Net als die hiernaast. Mogelijk een fictieve klok, want de wijzers bewegen constant. Elke wijzer staat nooit stil, en legt constant een stukje van de afstand af die hij in die 12 uur zou moeten afleggen. De lange minutenwijzer beweegt sneller dan de korte urenwijzer, want hij legt op 1 uur dezelfde afstand af als de korte urenwijzer in 12 uur. Stel nu dat het 5 na 1 is. Je zou denken dat beide wijzers op elkaar staan. Niets is echter minder waar. De lange wijzer staat wel op 5 minuten, maar in de 5 minuten dat de minutenwijzer van de 12 naar de 1 is verplaatst, is ook de urenwijzer een beetje verder

naar de 2 verschoven. We kunnen ons als eerste dus afvragen hoe dikwijls dit voorkomt: hoe dikwijls dat beide wijzers exact samenvallen in een tijdsinterval van 12 uur (24u zou weinig zin hebben, aangezien dit gewoon 2 keer de volledige rotatie van de klok is). Met een beetje experimentele studie en logisch redeneren komen we tot 12 keer, als we als eerste en laatste tijdstip 12u meetellen. Het duurt namelijk elke keer ietsje langer dan 1 uur voordat de minutenwijzer de urenwijzer inhaalt. Ook algebraïsch vonden we hier een verklaring voor, hierover verder in dit werkstuk meer. In het geval van 5 na 1 (hierboven beschreven) kunnen we ons afvragen hoe laat dit dan exact is, want met 'ietsje meer dan 5 na 1' zijn we natuurlijk niet veel. Hier gaan we verder op in.

## De afgelegde hoek in functie van de afgelegde tijd

### *Afgelegde tijd*

Het leek ons het gemakkelijkst op te beginnen vergelijkingen op te stellen voor beide wijzers. De lange wijzer legt een volledige rotatie af in 1u. De korte wijzer legt deze rotatie af in 12u, en beweegt dus 12 keer zo traag. De afstand die deze wijzers afleggen hebben echter geen belang. Het gaat om de hoek die zij beslaan in een bepaalde tijd, met als 1 volledige rotatie 360 graden. De korte wijzer gaat dan  $30^\circ$  afleggen in 1u. Daarom de vergelijking  $y = 30x$  met  $y$  de hoek in graden en  $x$  de tijd in uren. De korte wijzer gaat  $360^\circ$  afleggen in 1u. Daarom de vergelijking  $y = 360x$ . Hier komen we ons eerste probleem al tegen. Zolang we deze vergelijking houden komen we al snel aan een hoek die groter is dan  $360^\circ$ . Daarom voeren we een parameter in, namelijk  $a$ . Dit is het aantal gehele uren die voorkomen in de tijd  $x$ , we passen onze vergelijking dus aan:  $y = 360(x - a)$  en  $0 \leq a \leq 11$  omdat we ons beperken tot een periode van 12 uur.  $y$  is opnieuw de hoek die de minutenwijzer heeft afgelegd,  $x$  de verlopen tijd.

### Afgelegde hoek

We vroegen ons dus af op welke tijdstippen de afgelegde hoek gelijk is. Het verschil in afgelegde hoek is dus  $0^\circ$ :  $|360(x-a)-30x| = \Delta\vartheta$  met  $\Delta\vartheta$  als het verschil van de afgelegde hoeken (we nemen hier steeds de kleinst mogelijke hoek, we nemen de absolute waarde van dit verschil zodat we een negatieve hoek vermijden). Als de wijzers samenvallen is  $\Delta\vartheta = 0$  dus  $|360(x-a)-30x| = 0$

Wanneer we  $a$  laten variëren van 0 tot 11 komen we 11 verschillende uitkomsten uit, hier zijn er enkele:

|         |                      |                        |
|---------|----------------------|------------------------|
| $a = 0$ | $360(x-0) - 30x = 0$ | $x = 0$                |
| $a = 1$ | $360(x-1) - 30x = 0$ | $x = 1 + \frac{1}{11}$ |
| $a = 2$ | $360(x-2) - 30x = 0$ | $x = 2 + \frac{2}{11}$ |
| $a = 3$ | $360(x-3) - 30x = 0$ | $x = 3 + \frac{3}{11}$ |

Hieruit trokken we snel onze conclusies: het tijdstip waarop de wijzers exact samenvallen is  $a + \frac{a}{11}$  met opnieuw  $a$  het aantal gehele uren die gepasseerd zijn. Dit kunnen we verklaren doordat we in het begin al (experimenteel en door logisch redeneren) vonden dat in elk geheel uur de wijzers 1 keer exact samenvallen.

Wat als we nu het uur willen vinden waarop de wijzers niet exact samenvallen, maar bijvoorbeeld exact in elkaars verlengde liggen. Het verschil in afgelegde hoek  $\Delta\vartheta$  wordt dan  $180^\circ$  i.p.v.  $0^\circ$ . Hieruit volgt volgende vergelijking:  $|360(x-a)-30x| = 180$

Wanneer we  $a$  laten variëren van 0 tot 11 komen we 11 verschillende uitkomsten uit, hier zijn er enkele:

|         |                        |                                    |
|---------|------------------------|------------------------------------|
| $a = 0$ | $360(x-0) - 30x = 180$ | $x = \frac{6}{11}$                 |
| $a = 1$ | $360(x-1) - 30x = 180$ | $x = \frac{6}{11} + \frac{12}{11}$ |
| $a = 2$ | $360(x-2) - 30x = 180$ | $x = \frac{6}{11} + \frac{24}{11}$ |
| $a = 3$ | $360(x-3) - 30x = 180$ | $x = \frac{6}{11} + \frac{36}{11}$ |

Hieruit trokken we snel onze conclusies: het tijdstip waarop de wijzers exact in elkaars verlengde liggen is  $\frac{6}{11} + a\frac{12}{11}$  opnieuw  $a$  het aantal gehele uren die gepasseerd zijn.

We vonden nu voor 2 verschillende verschillen in afgelegde hoek het tijdstip. Deze formule voor elke  $\Delta\vartheta$  afleiden is echter onbegonnen werk. We vonden hier dus een

nieuwe algemene formule voor:  $x = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + a\frac{12}{11}$



**Op dit moment hebben we dus 2 algemene formules:**

$$|360(x - a) - 30x| = \Delta\vartheta$$

$$x = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + a \frac{12}{11} \quad \text{met } 0 \leq a \leq 11 \text{ en } a \text{ het aantal gehele uren die gepasseerd zijn.}$$

### Toepassingen

Met deze 2 formules kunnen we dus uit elk verschil in afgelegde hoeken het tijdstip berekenen, maar ook uit elk tijdstip het verschil in afgelegde hoeken.

We kunnen dus bijvoorbeeld de hoek tussen de wijzers om 3u10 berekenen:

$$3u10 = \frac{19}{6} \quad \text{dit zijn 3 gehele uren, dus } a = 3.$$

In de  $\Delta\vartheta$ -formule vullen we  $x = \frac{19}{6}$  en  $a = 3$  in.

$$\left| 360\left(\frac{19}{6} - 3\right) - 30\frac{19}{6} \right| = \Delta\vartheta \quad \Delta\vartheta = 35^\circ$$

Ook kunnen we de hoek tussen de wijzers om 3u40 berekenen op dezelfde methode:

$$3u40 = \frac{11}{3} \text{ en } a = 3$$

$$\left| 360\left(\frac{11}{3} - 3\right) - 30\frac{11}{3} \right| = \Delta\vartheta \quad \Delta\vartheta = 130^\circ$$

Uit de vorige 2 berekeningen kunnen we dus besluiten dat elke hoek tussen -  $35^\circ$  (dit wordt  $35^\circ$  door het invoeren van de absolute waarde-tekens) en  $130^\circ$  voorkomt.

We kunnen ook de exacte tijdstippen berekenen waarop elk verschil in afgelegde hoek voorkomt.

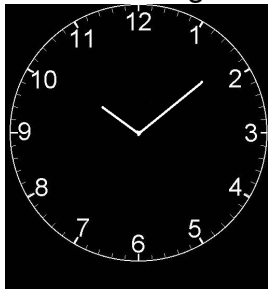
Vb: Elk tijdstip waarop  $\Delta\vartheta$  (verschil in afgelegde hoek)  $30^\circ$  is.

$$x = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + a \frac{12}{11} \quad \text{met } a \text{ laten variëren van 0 tot 11}$$

$$x_0 = \frac{1}{11} \quad x_1 = \frac{13}{11} \quad x_2 = \frac{25}{11} \quad x_a = \frac{|\Delta\vartheta|}{330} + a \frac{12}{11}$$

## Spiegelen volgens de noord-zuidas

In reclame-advertenties geeft men dikwijls een ideaal beeld van een horloge: de kleine en de grote wijzer zijn exact gespiegeld volgens de noord-zuidas.



De afgelegde hoek van de minutenwijzer moet dus exact gelijk zijn aan het tegengestelde van de afgelegde hoek van de urenwijzer:

$12K = -G$  met  $K$  als snelheid van de urenwijzer en  $G$  als snelheid van de minutenwijzer (omdat  $G$  12 maal zo snel beweegt dan  $K$ ).

$\frac{-1}{12}G = G - a$  met  $a$  als aantal volledige uren  $0 \leq a \leq 11$  (dit is hetzelfde dan het aantal volledige toeren van de grote minutenwijzer).

$$\frac{-13}{12}G = -a$$

$$G = \frac{12}{13}a$$

In het geval van de tekening hierboven stellen we na enig proberen  $a = 2$

Daaruit volgt dat  $G = \frac{24}{13} \approx 1,8461 \approx 1u50 \text{ min } 46 \text{ sec}$

## Urenwijzer draait de verkeerde kant uit

Als nu door een defect de kleine urenwijzer de verkeerde kant uit gaat en de grote minutenwijzer gewoon blijft verderdraaien, kunnen we ook berekenen op welk tijdstip de wijzers van de klok exact op elkaar staan. Dit doen we door onze oorspronkelijke vergelijking te gebruiken, maar aangezien de kleine urenwijzer de andere kant uit draait, wordt zijn snelheid negatief.  $|360(x - a) + 30x| = \Delta\vartheta$

Als de wijzers exact samenvallen is  $\Delta\vartheta = 0^\circ$

$$|360(x - a) + 30x| = 0^\circ \text{ en } 0 \leq a \leq 11$$

Enkele uitkomsten:

$$a = 1 \quad |360(x - 1) + 30x| = 0^\circ \quad x = \frac{12}{13} \quad \text{dit is } 11u \ 55\text{min}$$

Enkele andere problemen kunnen zijn:

Bereken de verschillende hoeken tussen de wijzers als je de wijzerplaat spiegelt, maar de wijzers bewegen op dezelfde manier, en dit tussen half 2 en kwart voor 1.

Als we de snelheid van de kleine wijzer verdubbelen, stel dan de vergelijking op die het verband weergeeft tussen het uur en de hoek tussen de 2 wijzers.

## Verwisselen van de wijzers

Een ander probleem is hoe je de exacte tijden kan berekenen wanneer we de wijzers kunnen verwisselen en toch nog een reëel uur krijgen.

Vanuit de gegeven informatie zijn we tot het inzicht gekomen dat de plaats van de kleine wijzer exact berekend moest worden. We hebben dus geëist dat

$K_1 * 12 * 12 = 360 + K_1$  voor het specifieke geval waarbij  $K_1$  ongeveer 2.5 graden was ( $K$ =kleine wijzer).

Hieruit konden we  $K_1$  berekenen:  $143K_1 = 360 \rightarrow K_1 = 2,51748217$  graden. Voor deze waarde van de kleine wijzer, zijn kleine en grote wijzer exact te verwisselen.

De grote wijzer bevindt zich dus op  $12K_1 = 30,20978604$  graden.

Nu hebben we echter maar één specifiek geval bestudeerd, en we zouden graag elk tijdstip kennen waarvoor de 2 wijzers onderling te verwisselen zijn.

Hiervoor gebruiken we de parameter  $a \in [0,11]$ .

Indien we deze in onze vorige vergelijking invoegen, bekomen we de algemene vergelijking die de plaats van de kleine wijzer aanduidt wanneer grote en kleine wijzer verwisseld kunnen worden:

$$144 = 360a + K$$

$$143K = 360a$$

$$\rightarrow K = \frac{360}{143}a \text{ en } 0 \leq a \leq 11$$

De grote wijzer bevindt zich in alle gevallen op  $12K$  graden.

Wanneer we dan eens kijken hoeveel keer we ons zouden kunnen vergissen in één nacht, komen we tot de conclusie dat we 12 keer de wijzers met een exacte stand van plaats kunnen wisselen, vermits de formule dit aantoont.

Om het nog wat te verduidelijken volgen hier wat voorbeelden:

Wanneer we 0 invullen voor  $a$ , bekomen we waarde 0 graden voor de kleine wijzer, en  $12K=0$  graden voor de grote wijzer. Dit is natuurlijk vanzelfsprekend, omdat om stipt 12 uur, de wijzers op elkaar staan, en dus ook onderling verwisseld kunnen worden.

Stellen we  $a=1$ , krijgen we een  $K$  waarde van 2.157482517 graden, de waarde die we in het begin hebben genomen, een grote wijzer stand van  $12K=30.20979021$  graden.

Nemen we  $a=2$ , komen we aan een  $K$  waarde van 5.034965035 graden en een grote wijzer ter hoogte van  $12K=60.41958042$  graden.

Zo zouden we de 12  $a$  waarden kunnen uitrekenen, en zo blijkt dat we bij elke van deze waarde een unieke stand van grote en kleine wijzer vinden die op dat moment onderling verwisselbaar zijn. We kunnen dit illustreren door bijvoorbeeld ons laatste voorbeeld in de praktijk om te zetten: zetten we de wijzers ter hoogte van deze

hoeken, zien we dat het ofwel juist ná 12.10 uur is, verwisselen we de wijzers, dan lezen we een tijdstip van iets ná 2.00 uur af.

### **Secondenwijzer**

Tot nu toe hebben we echter een belangrijk deel van de klok overgeslagen: de secondenwijzer.

We hadden al een vergelijking voor de urenwijzer en de minutenwijzer, nu ook voor de secondenwijzer, want deze legt 720 volledige rotaties af in 1 uur.

Urenwijzer:  $y_1 = 30x$

Minutenwijzer:  $y_2 = 360(x - a)$

Secondenwijzer:  $y_3 = 21600(x - a) - b$  met  $0 \leq b \leq 59$  en  $b$  is het aantal volledige toeren van de secondenwijzer.

Uit onze berekeningen leiden we af dat er maar 1 moment is waarop alle 3 de wijzers op het zelfde punt staan, namelijk 0u0min0sec.

Uit onze berekeningen leiden we ook af dat er met de huidige tijdsindeling (12u, 60min) geen enkel moment is waarop we de wijzerplaat mooi in 3 kunnen verdelen.

# Wiskunde B-dag 2007

### Hoekpunt(en) van polygonen

Een *polygoon* is een gesloten lijn die uit  $n$  lijnstukken bestaat. De polygoon heeft  $n$  hoekpunten en  $n$  zijden. Een polygoon heeft altijd evenveel hoekpunten als zijden.

De som van de binnenhoeken van elke driehoek is  $180^\circ$ . Voor een bewijs hiervan, zie Fig. 1. De som van de binnenhoeken van een polygoon wordt gegeven door de formule:

$$180(n - 2).$$

Het bewijs hiervan gaat als volgt via inductie (zie ook Fig. 2):

$$S_n = 180(n - 2)$$

$$S_3 = 180(3 - 2) = 180$$

$$S_n + 180 = S_{n+1}$$

$$180(n - 2) + 180 = 180((n + 1) - 2)$$

$$180n - 360 + 180 = 180(n - 1)$$

$$180n - 180 = 180n - 180$$

*Q.E.D.*

In een polygoon kunnen lijnstukken snijden, maar in een simpele polygoon gebeurt dat nooit.

Een polygoon heeft een *binnen-* en een *buitengebied*. Het buitengebied is oneindig groot en het binnengebied wordt door de lijnen begrensd. De lijnstukken zelf behoren niet tot het binnen- of buitengebied.

Als je een hoek van een polygoon meet, moet je altijd meten in het binnengebied. Afhankelijk van de grootte van de hoek kun je drie soorten hoeken onderscheiden;

1. *Uitspringende hoek*; de hoek ligt tussen  $0^\circ$  en  $180^\circ$ .
2. *Inspringende hoek*; de hoek ligt tussen  $180^\circ$  en  $360^\circ$ .
3. *Gestreckte hoek*; de hoek is  $180^\circ$ .

Hoeken van  $0^\circ$  of  $360^\circ$  zijn niet mogelijk in simpele polygonen, omdat de lijnstukken in dat geval niet sluitend zouden zijn.

Een hoek en een hoekpunt zijn niet hetzelfde. Een hoekpunt is een punt waar twee verschillende zijden samenkomen. De hoek is het aantal graden, die de twee bijeenkomende zijden in het binnengebied vormen.

Verder bevat een simpele polygoon altijd ten minste drie uitspringende hoeken. Het bewijs gaat als volgt:

Stel er is een polygoon met  $n$  hoeken, waarvan maar twee hoekpunten uitspringend zijn. Dan zijn er dus  $(n - 2)$  gestrekte of inspringende hoeken, en onthoud dat deze dus een hoek maken die  $\geq 180$  is, en dat de som van deze hoeken dus  $\geq 180(n - 2)$  is. Het probleem wordt al snel duidelijk: De som van alle binnenhoeken van een polygoon wordt gegeven door de formule  $180(n - 2)$ , en een polygoon met minder dan 3 uitspringende hoeken is dus niet mogelijk.

### Diagonalen en kapen

In een polygoon met  $n$  hoekpunten kunnen alle hoekpunten met de andere  $n - 1$  punten verbonden worden. De twee verbindingslijnstukken van een punt met zijn buurpunten vormen de zijden van het polygoon. Een verbindingslijnstuk, dat geheel in het binnengebied ligt en geen andere lijnen snijdt, behalve in de hoekpunten zelf, is een *diagonaal*.

Als twee buurpunten van  $p_n$  ( $p_{n-1}$  en  $p_{n+1}$ ) met elkaar door een diagonaal verbonden worden, is  $p_n$  een *kaap*. Elke kaap is dus een uitspringende hoek, maar andersom is dat niet het geval.

Als een kaap wordt weggeknipt wordt de diagonaal, die zijn voormalige buurpunten verbond, een zijde van de nieuwe polygoon. In dit geval ontstaat er altijd een nieuwe kaap.

### Triangulatie van polygonen

*Triangulatie* houdt in: het opdelen van een polygoon in driehoeken, waarbij de hoekpunten van de driehoeken overeenkomen met de hoekpunten van de polygoon, en de driehoeken elkaar niet overlappen. Elke polygoon met  $n$  hoeken kan in  $n - 2$  driehoeken verdeeld worden. Dit kunnen we aannemen omdat we al bewezen hebben dat de som van de binnenhoeken van een polygoon  $180(n - 2)$  is. Als het in  $n - 1$  driehoeken verdeeld zou worden dan zou de som van de binnenhoeken niet uitkomen en zou de triangulatie niet kloppen.

Een *convexe polygoon* is een simpele polygoon met alleen maar uitspringende hoeken. Een convexe polygoon is makkelijk te trianguleren; neem een willekeurig hoekpunt  $p$  en trek een lijn naar elk andere hoekpunt dat niet een buurpunt is van  $p$ . Wanneer een polygoon één inspringende hoek heeft heet de polygoon *bijna convex*. Een bijna convexe polygoon kan ook makkelijk getrianguleerd worden: Dit gaat via dezelfde methode als bij een convexe polygoon, alleen moet je beginnen met lijnen trekken vanaf de inspringende hoek. Voor wat voorbeelden van de triangulatie van convexe en bijna convexe polygonen, zie Fig. 3

Een polygoon die niet convex of bijna convex is wordt lastiger te trianguleren. In dit geval moet de polygoon eerst in convexe en/of bijna convexe polygonen verdeeld worden. Deze kunnen dan apart getrianguleerd worden. Een bewijs dat dit mag:

Het aantal driehoeken in  $P_n$  wordt gegeven door  $(n - 2)$ , als je  $P_n$  opsplitst in  $P_a + P_b$  delen. De nieuwe polygonen delen één zijde, dus de som van de hoekpunten van  $a$  en  $b$  is:

$$\begin{aligned} a + b &= n + 2 \\ a &= n + 2 - b \\ b &= n + 2 - a \end{aligned}$$

Het aantal driehoeken in  $a$  is  $(n - b)$ , in  $b$  is het  $(n - a)$ , dus het aantal driehoeken in  $P_n$  is:

$$\begin{aligned} P_n &= (a + b) = \\ (n - b) + (n - a) &= \\ 2n - (a + b) &= \\ 2n - (n + 2) &= \\ n - 2 \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

De *diagonaalstelling* luidt als volgt:

*Elke simpele polygoon heeft minstens een diagonaal.*

Deze stelling kan makkelijk ontkracht worden, want een driehoek is eerder als simpele polygoon gedefinieerd, en een driehoek heeft duidelijk geen diagonaal. Wij hebben dus de stelling anders geïnterpreteerd:

*Elke simpele polygoon met meer dan drie hoekpunten heeft minstens een diagonaal.*

Als  $h$  een uitspringend hoekpunt is, maar geen kaap, dan is er een diagonaal vanuit  $h$ . Dit is makkelijk te bewijzen (zie Fig. 4): als  $h$  geen kaap is, is er een punt  $Q$  tussen  $h$  en de buurpunten van  $h$ ,  $P_{h-1}$  en  $P_{h+1}$ , en  $hQ$  vormt een diagonaal.

Hiermee hebben we meteen de diagonaalstelling bewezen: elke polygoon heeft ten minste drie uitspringende hoeken, en we hebben net aangetoond dat als een uitspringend hoekpunt geen kaap is, er een diagonaal geconstrueerd kan worden tussen dat hoekpunt en het punt dat tussen de buurpunten van het uitstekende hoekpunt zit. Als het uitspringende hoekpunt wel een kaap is, kan er uiteraard een diagonaal geconstrueerd worden tussen de twee buurpunten.

*Stelling over Triangulatie*

Door de diagonaalstelling is elke polygoon in polygonen  $a$  en  $b$  op te delen. Met behulp van  $P_n = a + b = n - 2$ , zoals eerder bewezen, kan elke polygoon worden opgedeeld in  $n - 2$  driehoeken.



## Bewaakte polygonen

Dit deel gaat over de bewaking van (polygonische) ruimtes. Het probleem kan als volgt omschreven worden:

*Hoe kunnen we met zo min mogelijk beveiligingscamera's in een polygonische ruimte toch alles in de gaten houden?*

Verder zijn er nog enkele "spelregels":

- Het te bewaken gebied is in het binnengebied van een simpele polygoon.
- Alle camera's moeten op een hoekpunt van de polygoon staan.

We kunnen al snel een aantal dingen constateren.

*Elke (bijna-) convexe polygoon kan door één camera beveiligd worden.*

Dit is zo omdat je bij een convexe en een bijna convexe polygoon altijd een punt hebt waarvandaan je naar alle andere hoekpunten die niet buurpunten zijn een diagonaal kunt construeren.

*Elke simpele 5-hoek kan door één camera beveiligd worden.*

Zie voor de uitleg hiervan ook Fig. 5.

Onthoud dat een vijfhoek minstens drie uitspringende hoeken heeft. Als de vijfhoek geen inspringende hoeken heeft is het convex en kan de camera makkelijk opgesteld worden volgens de vorige regel. Met één inspringende hoek gaat het even makkelijk, maar met twee inspringende hoeken wordt het lastig. Er zijn hier echter maar twee vormen van mogelijk, namelijk in de vorm *uit – uit – uit – in – in* of *uit – in – uit – in – uit*. In het eerste geval kan een camera opgesteld worden bij de tweede "uit", en in het tweede geval bij de eerste "in". Zie Fig. 5 om dit duidelijker te maken.

*Elke polygoon kan bewaakt worden door alleen camera's te plaatsen op alle inspringende hoeken.*

We gaan er hier vanuit dat de polygoon inspringende hoeken heeft, anders is dit uiteraard niet mogelijk.

Deze stelling klopt omdat een diagonaal alleen voorkomen kan worden door een inspringende hoek, en aangezien op alle inspringende hoeken een camera staat, is alles beveiligd.

### De stelling van de bewaakte polygoon.

*Een simpele polygoon met  $n$  hoekpunten kan altijd bewaakt worden door  $p$  camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met  $p$  gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor geldt*

$$p > \frac{1}{3}n - 1.$$

Om deze stelling te bewijzen beginnen we eerst met een voorbeeld (zie Fig. 6).

Eerst tonen we aan dat  $p = \frac{1}{3}n - 1$  echt niet klopt bij bijvoorbeeld  $n = 9$ . In dit geval lukt het niet omdat er geen enkel hoekpunt in de polygoon is waarvandaan je twee "spitsen" kunt zien.

We gaan nu de stelling van de bewaakte polygoon bewijzen door eerst te bewijzen dat je de hoekpunten van een polygoon op zo een manier kan kleuren, dat geen aangrenzende hoekpunten dezelfde kleur delen (Zie fig. 7).

De eerste driehoek van een polygoon heeft drie verschillende kleuren. Het heeft ook tenminste een verbinding met een andere driehoek. Door deze verbinding delen de twee driehoeken ook twee hoekpunten. Het derde punt van de nieuwe driehoek heeft dus uiteraard de ontbrekende kleur. Zo kan je doorgaan tot de polygoon volledig gekleurd is, zolang je geen reeds gekleurde punten tegenkomt. Maar dit kan sowieso niet: De rand van een polygoon is een onafgebroken lijn, dus er kan onmogelijk een "lus" zijn waardoor het niet uitkomt.

De minst voorkomende kleur komt maximaal  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  keer voor, want als het groter zou zijn dan zou de totale hoeveelheid kleuren groter dan de totale hoeveelheid hoekpunten zijn.

Nu gaan we weer over camera's denken. Omdat elke driehoek elke kleur bevat, is het dus efficiënt om een camera bij elke minst gebruikte kleur te zetten. De minst gebruikte kleur komt maximaal  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  keer voor, en dat is dus de hoeveelheid camera's die we maximaal nodig hebben.

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  is de eerstvolgende gehele waarde die groter is dan  $\frac{1}{3}n - 1$ , en dat komt overeen met onze stelling.

### De stelling van twee kapen

Als je een driehoek  $\triangle ABC$  hebt, zijn  $B$  en  $C$  verbonden met elkaar. Als deze driehoek in een getrianguleerde polygoon zou liggen, zou  $A$  een kaap zijn, omdat  $AB$  en  $AC$  zijden van de polygoon zijn en  $BC$  dan een diagonaal in de polygoon is. Als  $AB$  en  $AC$  geen zijden van de polygoon waren, zouden  $B$  of  $C$  of allebei geen buurtpunten van  $A$  zijn, waardoor er ook een andere diagonaal zou zijn en  $A$  zou dan geen kaap zijn. Want nu raken  $B$  en  $C$  de buitenkant van de polygoon en zijn ze wel buurtpunten van  $A$ .

Een getrianguleerde polygoon met meer dan drie zijden bevat minstens twee driehoeken met twee zijden aan de rand van de polygoon, aangezien de getrianguleerde polygoon geconstrueerd kan worden door steeds driehoeken aan elkaar te plakken; dan is er altijd minstens een begin en eind, die beiden twee zijdes van de polygoon delen. Zo'n driehoek bevat altijd een kaap, zoals hierboven is uitgelegd. Er zijn dus minstens twee kapen, want er zijn ook minstens twee driehoeken met twee zijden aan de rand. Aangezien het begin en eind punten zijn, zoals in een graaf getekend, liggen ze niet tegen elkaar en zijn er dus altijd twee gescheiden kapen.

## Triangulaties van polygonen

Een triangulatie van een polygoon is een bepaalde manier om de polygoon in driehoeken op te delen.

Bij een convexe polygoon is dit niet heel ingewikkeld. Bij een polygoon met vijf punten zijn vanuit elk punt twee diagonalen te trekken (niet naar zichzelf, noch naar zijn 2 buren). Op die manier tel je elke diagonaal twee keer, dus het aantal diagonalen is  $(5 * 2 - 2) = 5$ . Als je 1 diagonaal hebt gekozen om op te delen, is er een driehoek en een vierhoek over. De vierhoek is op twee manieren op te delen, dus krijgen  $2 * 5$  triangulaties. Zo tel je echter alle triangulaties dubbel, dus zijn er vijf.

Om het aantal triangulaties te berekenen is een slimme manier te bedenken: het probleem is recursief.

Zodra je de polygoon ergens hebt gesplitst, krijg je twee nieuwe polygonen; het product van hun triangulaties is het aantal triangulaties wat mogelijk is bij deze diagonaal. Kies een zijde als startpunt, en teken daarvandaan elke mogelijke driehoek. Als de hoekpunten van deze driehoek drie buurpunten in de polygoon zijn, is het aantal triangulaties wat verder mogelijk is  $T_{n-1}$ . Aangezien bij  $n > 3$  de eerste twee mogelijke driehoeken deze driehoeken zijn, bevat de som in ieder geval  $2 * T_{n-1}$ .

Daarna loop je de  $n - 5$  overige punten na, daarmee driehoek vormend. Bij de 1<sup>e</sup> is er aan de ene kant een  $2 + 1$  hoek ontstaan, aan de andere kant een  $(n - 1) - 1$  hoek.

Bij een driehoek is het evident dat deze 1 driehoek is.

$$T_3 = 1$$
$$T_n = T_{(n-1)} * 2 + \sum_{k=0}^{n-5} T_{(k+3)} * T_{(n-2-k)} \text{ voor } n > 3$$

Zie extra blad voor T3 t/m T50

Een bijna convexe polygoon is een iets lastiger geval. Die heeft  $B_n = T_n - T_{n-1}$  voor  $n > 3$  triangulaties.

Dat is logisch, als je als start een lijn neemt van de inspringende hoek tot een buurpunt van de inspringende hoek. Daarvan kan nu 1 van de driehoeken bestaande uit 3 buurpunten niet meer worden gemaakt. Aangezien die driehoek leidde tot  $T_{(n-1)}$  triangulaties, is het evident dat  $B_n = T_n - T_{n-1}$  voor  $n > 3$ . We nemen aan dat de lezer van dit boekje zelf in staat is deze zeer ingewikkelde som uit te rekenen, dus geen meegeleverde tabel.

Bij een polygoon met 2 verbindingslijnstukken van niet buurpunten geheel buiten de polygoon, is de formule  $Z_n = B_n - B_{n-1}$  voor  $n > 3$ , want alle triangulaties die de driehoek bevatten, die nu niet meer mogelijk zijn nu onmogelijk. Dat zijn alle triangulaties van  $B_{n-1}$  omdat daar een driehoek al is ingevuld.

**Aanvulling bij werkblad van R25.**

De lijnen zijn doorgetrokken. Zo zijn velden ontstaan, waarin het vijfde punt zou kunnen geplaatst worden. Op deze manier staan de velden voor convexe, bijna-convexe of niet-convexe polygonen. Bij elk veld staat een waarde; het aantal manieren waarop het polygoon kan worden getrianguleerd. Dat is berekend met behulp van de formules bij de convexe en bijna convexe posities, bij de anderen is dit met behulp van tekeningen gedaan.

3: 1  
4: 2  
5: 5  
6: 14  
7: 42  
8: 132  
9: 429  
10: 1430  
11: 4862  
12: 16796  
13: 58786  
14: 208012  
15: 742900  
16: 2674440  
17: 9694845  
18: 35357670  
19: 129644790  
20: 477638700  
21: 1767263190  
22: 6564120420  
23: 24466267020  
24: 91482563640  
25: 343059613650  
26: 1289904147324  
27: 4861946401452  
28: 18367353072152  
29: 69533550916004  
30: 263747951750360  
31: 1002242216651368  
32: 3814986502092304  
33: 14544636039226909  
34: 55534064877048198  
35: 212336130412243110  
36: 812944042149730764  
37: 3116285494907301262  
38: 11959798385860453492  
39: 45950804324621742364  
40: 176733862787006701400  
41: 680425371729975800390  
42: 2622127042276492108820  
43: 10113918591637898134020  
44: 39044429911904443959240  
45: 150853479205085351660700  
46: 583300119592996693088040  
47: 2257117854077248073253720  
48: 8740328711533173390046320  
49: 33868773757191046886429490  
50: 13132789824216936547799190

Fig 1.

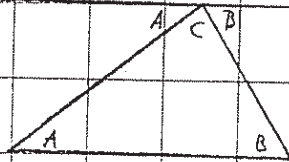
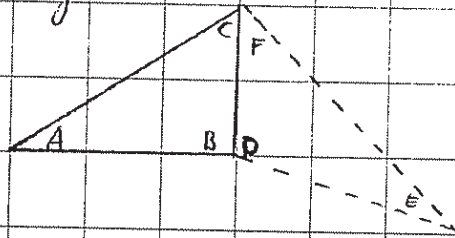


Fig. 2.



$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360^\circ$$

Fig. 3

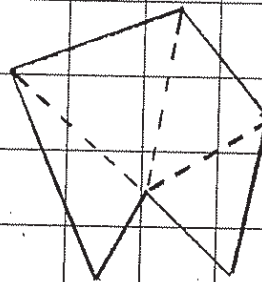
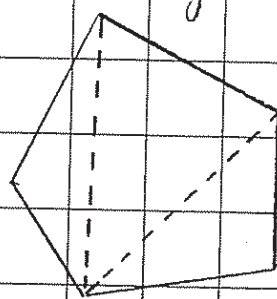


Fig. 4

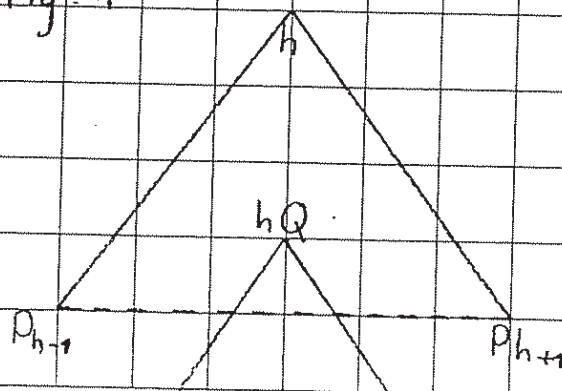


fig 5

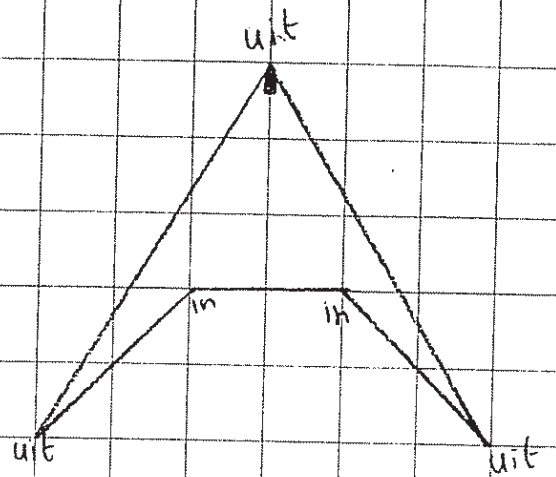
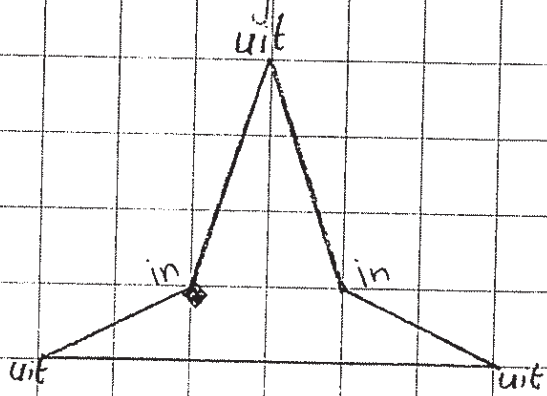


fig 6

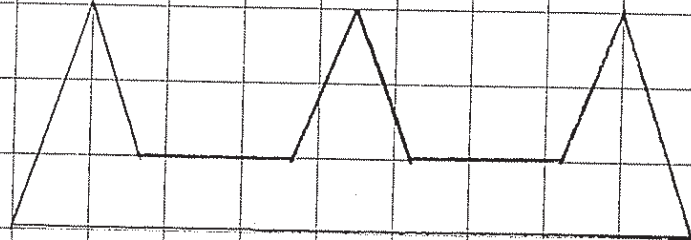
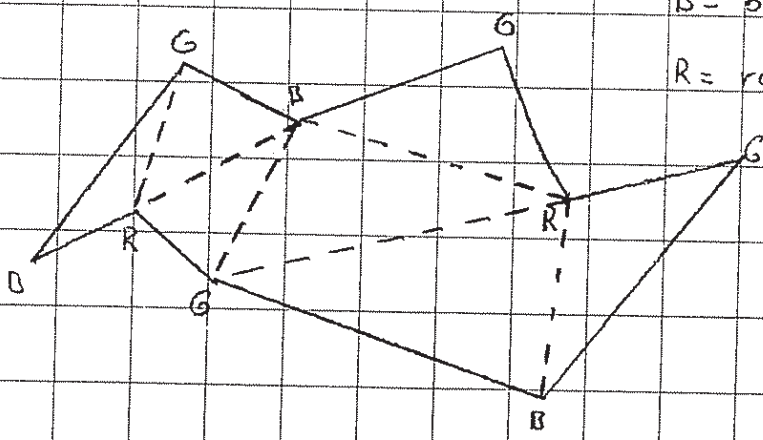


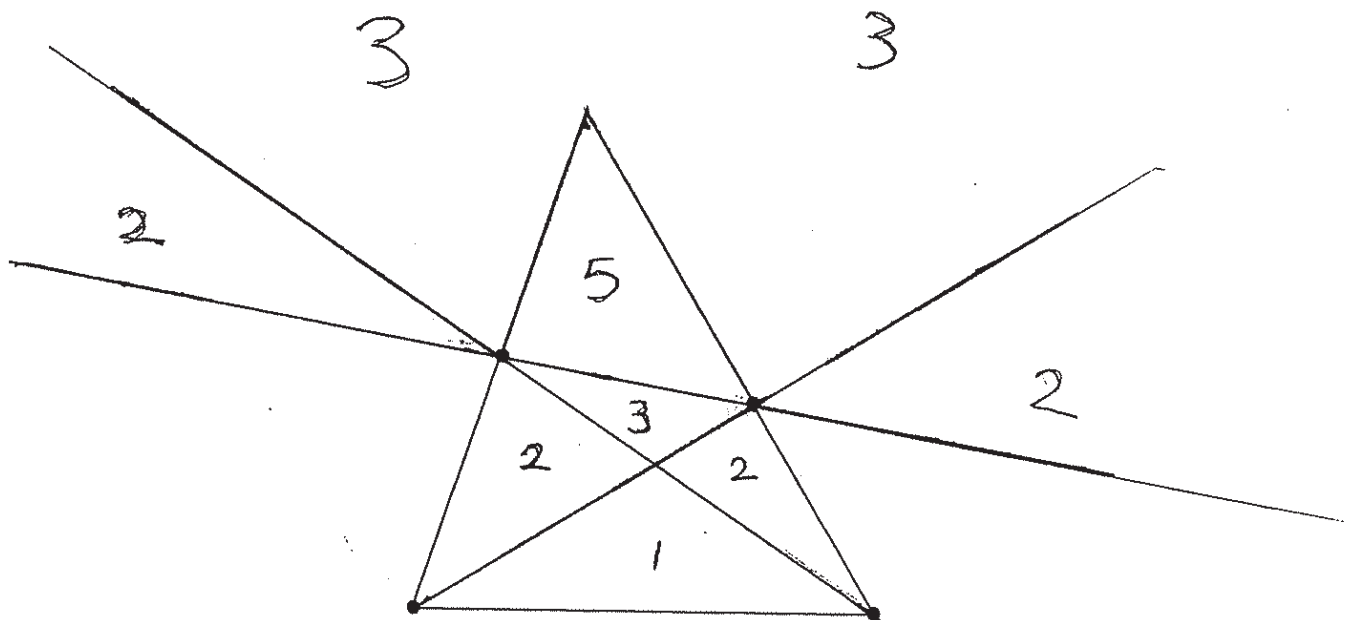
fig. 7



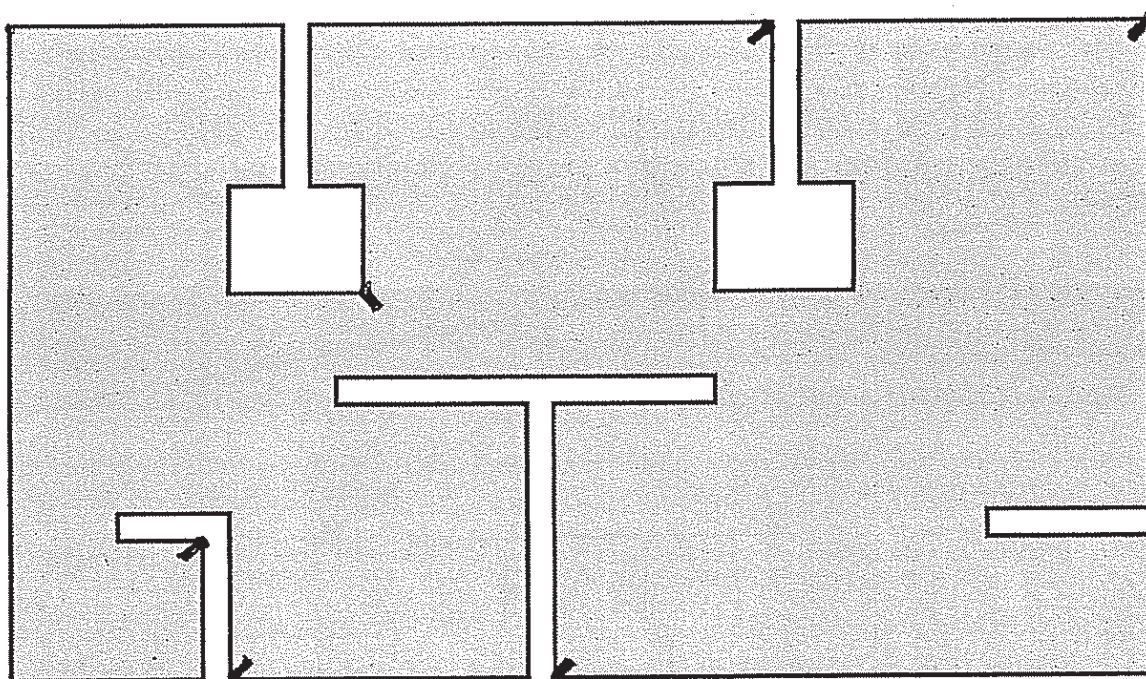
G = groen  
B = blauw  
R = rood



Werkblad bij vraag R25



Werkblad bij vraag R31





Essen, 13 januari 2010

Beste leerlingen  
Beste ouders

Wiskunde is een wetenschap die aan de basis ligt van heel wat andere wetenschappen en onderzoek. De problemen die wij in de klas aanpakken zijn echter altijd zeer vereenvoudigd en hebben tot doel de leerlingen individueel in staat te stellen om wiskunde te bedrijven. Een complex probleem los je echter niet binnen het tijdsbestek van 50' op en vaak ook niet alleen. Reeds enkele jaren organiseren we in het 6<sup>de</sup> jaar de Wiskunde B-dag (een initiatief van het Freudenthal instituut in Nederland waar ondertussen scholen uit België, Duitsland en Denemarken aan mee doen). Tijdens deze dag werken de leerlingen in teams van maximaal 4 leerlingen, gedurende een hele dag aan een complex probleem. Het gaat dan niet alleen om 'een antwoord' op 'een vraag', maar er moet nagedacht worden over de aanpak van het probleem, over mogelijke verschillende oplossingen en hun consequenties, over de verwerking van de resultaten, over de verslaggeving, over de presentatie van de gevonden oplossingen, enzovoort. Het gaat hier om vaardigheden die je later in je loopbaan ook veelvuldig zal nodig hebben.

Op donderdag 21 januari presenteren we jullie een (praktische) opdracht. Je kan hieraan werken van 8u25 tot 15u30 in teams van maximaal 4 leerlingen over de klassen heen. Je geeft deze teams op via een bericht op smartschool naar Mr. Peeters en mevr. Verbeeck ten laatste op maandag 18 januari. Als er leerlingen niet in een team voorkomen, herverdelen wij de teams zonder inspraak. Zorg dus dat je dit als groep goed doet.

Verloop van de dag:

- 8u25: verzamelen in lokaal 26. Hier krijgen jullie je opgaven en de lokaalverdeling.
- 10u – 10u30: koffie en thee worden door de school verzorgd in lokaal 26.
- 12u – 12u50: lunchpauze (niet verplicht!) in je eigen lokaal of in de refter.
- 14u – 14u30: frisdranken worden door de school verzorgd in lokaal 26.
- 15u15 – 15u45: verslag afgeven via usb-stick in lokaal 26

## Afspraken en tips:

- In lokaal 26 vatten jullie wiskundeleerkrachten de hele dag post, op de lesuren na die in het vijfde jaar gegeven worden. Je kan geen vraag stellen m.b.t. de oplossingen, wel kunnen we je aanpak mee bekijken.
- Bij voorkeur breng je per groepje een laptop mee. Indien dit niet lukt, maak je dit ten laatste op maandag 18 januari kenbaar. We reserveren in dit geval een laptop op school.
- Je mag allerlei hulpmiddelen gebruiken: wiskunde- en andere boeken, rekenmachine, internet, kopieerapparaat...
- Lees eerst de hele opgave goed door, werk je in groep in en maak daarna een taakverdeling. Het kan zijn dat je het eerste deel echt moet doornemen om zicht op de opgave te krijgen.
- Bespreek op meerdere momenten in groep je werk en herzie eventueel je planning.
- Het verslag moet geen opeenvolging zijn van 'antwoorden op de vraagjes'. Het kan zijn dat je beter begint met de laatste opgave of een ingewikkelder opgave waarvan de vorige vragen een onderdeel vormen. (denk aan de a, b, c ... vraagjes die bij een test of examen vaak bedoeld zijn om je naar het grotere probleem te gidsen).
- Lees de tekst 'Hoe schrijf ik een exact wetenschappelijk verslag?' grondig door, een tekst die je vindt op de website van het tijdschrift 'Uitwiskeling' en die gebaseerd is op het werk van onze wiskundecollega's van het Sint - Pieterscollege in Leuven.
- Begin tijdig aan je verslag (ten laatste om 11u).
- Het werk telt mee als test voor het volgende rapport.
- Jullie worden beoordeeld op de kwaliteit van je verslag en op jullie samenwerking als groep:
  - o Kwaliteit van het verslag volgens de volgende criteria: wiskundige redeneringen (10p), volledigheid (2p), algemene inhoud (3p), structuur en lay out (2p), wiskundige en Nederlandse taal (2p), illustraties (1p).
  - o Samenwerking: via een groepsevaluatieformulier waarbij jullie elkaars medewerking beoordelen.
- Bij afwezigheid dient er een individuele vervangende opdracht gemaakt te worden. Het luik 'samenwerking' valt dan weg bij de beoordeling.
- Om jullie competitiegeest wat aan te scherpen... We nemen dit jaar niet deel aan de internationale wedstrijd, maar organiseren het intern: het beste werk krijgt een prijs!

We wensen jullie alvast een interessante wiskundedag toe en kijken uit naar jullie boeiende en hoogstaande werken.

Met vriendelijke groeten

de leerkrachten wiskunde

Sofie Costermans, Gilberte Verbeeck, Jan Peeters en Joris Van Hove

Beoordelingsformulier B-dag opgave 2002  
Jac. P. Thijsse College

Namen:

De beoordeling vindt plaats aan de hand van de volgende punten:

| INHOUDELIJK                                                                                   |   |   |   |   |   |   | opmerkingen |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-------------|
| <b>1 probleemstelling</b><br>in de inleiding wordt het probleem uitgelegd                     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |             |
| <b>2 probleemverkennen</b>                                                                    |   |   |   |   |   |   |             |
| opdracht 1 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 2 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 3 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 5 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 7 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 9 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 10 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                     | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| opdracht 11 vraag en antwoord goed verwerkt en beantwoord                                     | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| <b>3 plan maken</b><br>onderdeel 1<br>Bij elke opdracht een beargumentering van het antwoord. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |             |
| <b>4 plan uitvoeren</b><br>onderdeel 2<br>Opdracht 12 en 13 verwerkt tot een goed antwoord    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |             |
| <b>5 conclusie</b><br>Een eindconclusie met een terugblik op de gekozen methode bij 12 en 13  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |             |
| <b>ALGEMEEN</b>                                                                               |   |   |   |   |   |   |             |
| Totaalindruk bij het doorbladeren, zoals: indeling, structuur, overzichtelijkheid             | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| Het werkstuk is los van de opdracht te lezen                                                  | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| Leesbaarheid en spelling                                                                      | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| rapporterend taalgebruik i.p.v. verhalend                                                     | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| creativiteit en realiteitszin                                                                 | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| aanwezigheid van zinvolle opmerkingen die de directe oplossing overstijgen                    | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| <b>VAKVAARDIGHEDEN</b>                                                                        |   |   |   |   |   |   |             |
| Opdracht 1 en 2 zijn netjes verwerkt in een tabel                                             | 0 | 1 | 2 |   |   |   |             |
| Opdracht 4 geen getallen gegeven, maar een bewijs                                             | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |   |             |
| Opdracht 6 wiskundig correct gedaan                                                           | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |   |             |
| Opdracht 8 wiskundig correct gedaan                                                           | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |   |             |

Opmerkingen: