



## Discrete dynamische systemen: wiskundige modellen met rijen, vectoren en matrices

Johan Deprez  
Dirk Janssens  
Vliebergh-Sencie  
Leuven, 13 en 20 april

LEUVEN

## Kennismaking

- ASO – TSO?
- veel – weinig uren wiskunde?
- niet - een beetje - goed vertrouwd met gebruik van TI83/84: basis?
- ... : voor rijen/recursieve vergelijkingen?
- ... : voor matrices?

LEUVEN

## Kennismaking

- EHSAL = economisch hoger onderwijs van 2 cycli, wiskunde en statistiek in de kandidaturen/Bachelor
- academische lerarenopleiding K.U. Leuven en U.A.

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
LEUVEN



- stuurgroep T<sup>3</sup>
- redactie Uitwiskeling



LEUVEN

## Discrete dynamische systemen: wiskundige modellen met rijen, vectoren en matrices

- vandaag: rijen, recursievergelijkingen  
volgende week: vectoren en matrices
- grafische rekenmachines ter beschikking
- afwisseling tussen
  - luisteren en kijken
  - je *mag* meedoen met je rekenmachine, maar ik heb niet de mogelijkheid om je ondertussen te helpen
  - zelf aan het werk

LEUVEN

## Materiaal bij sessie 1

- kopie van de slides in map, ook op  
[home.scarlet.be/~p1925850/vliebergh\\_april\\_2005](http://home.scarlet.be/~p1925850/vliebergh_april_2005)
- werkteksten om tijdens de sessies te gebruiken
- tekst om achteraf te lezen (in map, niet letterlijk wat in de sessie aan bod komt)

LEUVEN

## Recursieve vergelijkingen: waar te gebruiken?

- leerplan 3de graad ASO - 6u:
  - “De leerlingen kunnen problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen. (DI3)”
  - keuze-onderwerp iteratie
  - vrije ruimte
- discrete veranderingsprocessen/iteratie ook toegankelijk voor andere richtingen in ASO en TSO

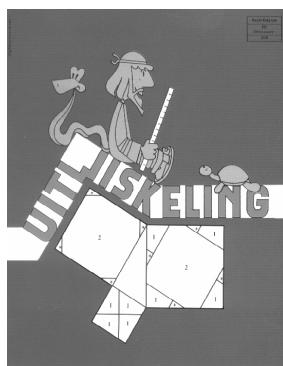
LEUVEN

## Bronnen (o.a.)



J.D. en Jan Roels,  
Discrete dynamische  
systemen, Uitwiskeling  
20/3, mei 2004

(≈ tekst om achteraf te  
lezen)

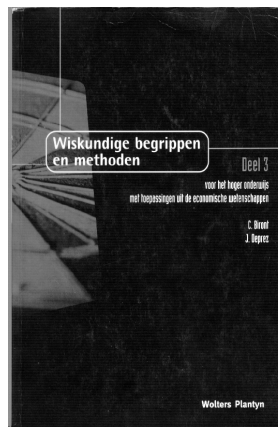


LEUVEN

## Bronnen (o.a.)

C. Biront, J.D.,  
Wiskundige begrippen en  
methoden – deel 3,  
Wolters-Plantyn, 1998

EHSAL



LEUVEN

## Overzicht

- Inleiding
- Met andere ogen kijken naar een klassieker ...
- Medicijspiegel
- Oefening: kerstbomen planten
- Vraag en aanbod: een discreet, dynamisch marktmodel
- Oefening: een ander discreet, dynamisch marktmodel
- Lineaire recursievergelijkingen van ...
- Discrete logistische groei
- Evolutie van de bevolking van de VS

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...



Voor de aanleg van een brug over een spoorweg moet zand aangevoerd worden. Op de plaats waar het zand gewonnen wordt, is er een kleine vijver van 900 m<sup>2</sup>, die door de graafwerken vergroot wordt. Men wil er een grote vijver van maken die dienst zal doen voor waterrecreatie. Elke week wordt de vijver 150 m<sup>2</sup> groter. Bij het begin van de werken merkt een arbeider van de graafirma op dat een bepaalde algensoort 8 m<sup>2</sup> van de oppervlakte van de vijver inneemt. Tijdens de volgende weken blijkt deze oppervlakte elke week met een kwart (van de oppervlakte die op dat ogenblik reeds ingenomen is) toe te nemen. De arbeider maakt zich ongerust en merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. De vijver zal anders vlug volledig volgegroeid zijn met algen. Maar zijn baas ziet voorlopig geen gevaar: "De vijver wordt toch elke week 150 groter."

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. van de) vijver:

- begin: 900 (m<sup>2</sup>)
- elke week: +150 (m<sup>2</sup>)

lineaire groei:  $V = 900 + 150t$  (eerstegraadsfunctie)

$t$  = tijd (in weken)

tijd als *continue* veranderlijke: alle waarden van  $t$  zijn bruikbaar

- realistisch? (elke dag, elk uur, ... even veel?)
- in overeenstemming met gegevens?

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. van de) vijver:

- begin: 900 (m<sup>2</sup>)  $V_0 = 900$
- elke week: +150 (m<sup>2</sup>)  $V_n = V_{n-1} + 150$

rij (beschreven door formule voor algemene term)

recursievergelijking met beginvoorwaarde

lineaire groei:  $V_n = 900 + n \cdot 150$  (rekenkundige rij)

$n$  = tijd (in weken)

tijd als *discrete* veranderlijke: alleen gehele waarden van  $n$  worden gebruikt

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. van de) vijver:

- begin: 900 (m<sup>2</sup>)  $V_0 = 900$
- elke week: +150 (m<sup>2</sup>)  $\Delta V_n = 150$

rij (beschreven door formule voor algemene term)

differentievergelijking met beginvoorwaarde

lineaire groei:  $V_n = 900 + n \cdot 150$  (rekenkundige rij)

$n$  = tijd (in weken)

tijd als *discrete* veranderlijke: alleen gehele waarden van  $n$  worden gebruikt

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

$\Delta V_n = V_{n+1} - V_n = 150$  geeft

$$V_{n+1} = V_n + 150 \quad (\text{voor alle } n \geq 0)$$

oorspronkelijke recursievergelijking:

$$V_n = V_{n-1} + 150 \quad (\text{voor alle } n \geq 1)$$

equivalente vormen!

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. van de) vijver:

- begin: 900 (m<sup>2</sup>)  $V_n = 900 + n \cdot 150$
- elke week: +150 (m<sup>2</sup>)

geeft deze rij een volledig realistische beschrijving?

neen!

- eenvoudige rij die ...
- ... de realiteit benaderend weergeeft

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. ingenomen door) algen:

- begin: 8 (m<sup>2</sup>)  $A_0 = 8$
- elke week: +25% of  $\times 1.25$   $A_n = A_{n-1} \times 1.25$

rij (beschreven door formule voor algemene term)

recursievergelijking met beginvoorwaarde

exponentiële groei:  $A_n = 8 \cdot 1.25^n$  (meetkundige rij)

(continu:  $A = 8 \cdot 1.25^t$  (exponentiële functie))

LEUVEN

## Met andere ogen kijken naar een klassieker ...

groei (opp. ingenomen door) algen:

- begin: 8 (m<sup>2</sup>)  $A_0 = 8$
- elke week: +25% of  $\times 1.25$   $\Delta A_n = 0.25 \cdot A_n$

rij (beschreven door formule voor algemene term)

differentievergelijking met beginvoorwaarde

exponentiële groei:  $A_n = 8 \cdot 1.25^n$  (meetkundige rij)

(continu:  $A = 8 \cdot 1.25^t$  (exponentiële functie))

LEUVEN

## Besluit

discreet versus continu:

onafhankelijke veranderlijke (vaak de tijd) neemt alleen natuurlijke getallen als waarden aan

model:

eenvoudige rij/functie/... die de realiteit met een zekere graad van nauwkeurigheid weergeeft

LEUVEN

## Besluit

rekenkundige en meetkundige rijen als eenvoudige discrete modellen

meetkundige rijen als model voor groeiprocessen:

- groei van een bevolking waarvan aantal geboorten en sterften evenredig is met de bevolkingsgrootte
- ...

LEUVEN

## Besluit

recursievergelijking of differentievergelijking:

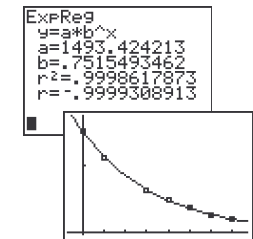
- vergelijking die een verband uitdrukt tussen een term van een (onbekende) rij en één of meer voorgaande term(en)
- wordt bij het modelleren vaak gebruikt om uit veronderstellingen over de verandering van opeenvolgende termen informatie af te leiden over de rij zelf

LEUVEN

## Medicijnspiegel

eenmalig toedienen van een dosis van 1500 mg:

na ... dagen	aantal mg
0	1500
1	1110
3	632
4	481
5	361
6	270
7	200



elke dag -25%

LEUVEN

## Medicijnspiegel

elke dag toedienen van een dosis van 1500 mg:

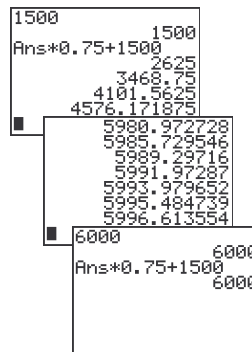
- begin: 1500 (mg)
- elke dag: eerst  $\times 0.75$ , dan  $+1500$  (mg)

$$H_n = 0.75 \cdot H_{n-1} + 1500 \quad H_0 = 1500$$

Hoe evolueert de hoeveelheid medicijn in het bloed?

LEUVEN

## Medicijnspiegel: basisscherm TI84

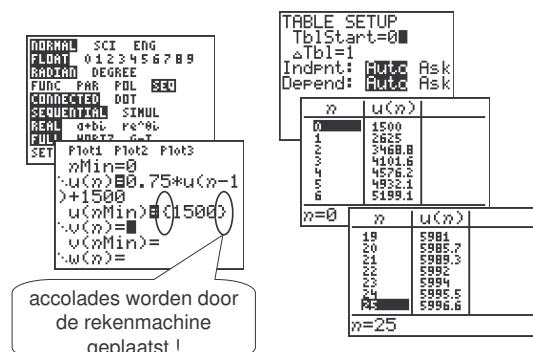


- vertraagd ...
- ... stijgend
- met limietwaarde 6000

limietwaarde 6000 =  
evenwichtswaarde

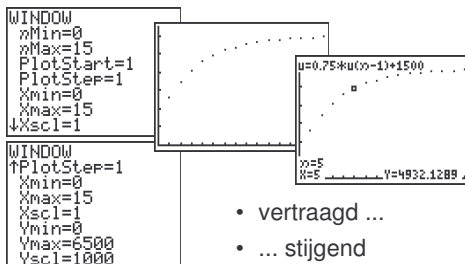
LEUVEN

## Medicijnspiegel: vergelijking en tabel



LEUVEN

## Medicijnspiegel: grafiek



- vertraagd ...
- ... stijgend
- met limietwaarde -  
evenwichtswaarde 6000

LEUVEN

## Medicijnspiegel: dynamisch evenwicht

bij evenwicht: 1500 mg verdwijnt uit lichaam  
1500 mg wordt toegevoegd

HOEEVEELHEID medicijn blijft gelijk, maar het  
zijn niet allemaal dezelfde moleculen:  
dynamisch evenwicht

evenwicht is snel te berekenen: het is het getal  $E$   
waarvoor  $E = 0.75E + 1500$ , dus  $E = 6000$

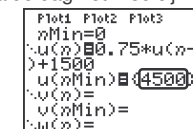
LEUVEN

## Medicijnspiegel: stabiel evenwicht

aanvankelijk 6000 mg  
medicijn in bloed

bij volgende inname nog  
4500 mg medicijn in bloed

Iemand neemt het medicijn al jaren in en vergeet een  
bepaalde dag het medicijn in te nemen. Wat gebeurt er?



evenwicht wordt  
hersteld

Als het systeem eerst in evenwicht is en daarna uit evenwicht  
gebracht wordt, dan keert het terug naar het evenwicht:  
stabiel evenwicht.

LEUVEN

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=-4500*0.75
^n+6000
u(nMin)=
w(n)=
u(nMin)=
w(n)=
```

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
LEUVEN

## Vraag en aanbod: dynamisch marktmodel

statisch marktmodel: prijs is (vast) getal

dynamisch marktmodel: prijs hangt af van de tijd

discreet, dynamisch marktmodel: prijs hangt af van de tijd en de tijd is een discrete grootheid

dus: prijs op tijdstip 0, 1, 2, ...

dus: een rij van prijzen (en aangeboden en gevraagde hoeveelheden):

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \dots \quad a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \quad v_0, v_1, v_2, v_3, \dots$$

LEUVEN

## Vraag en aanbod: vergelijking (1)

product met productietijd van ongeveer één jaar (wintertarwe, varkens, ...)

beslissing om te produceren (en product op de markt aan te bieden) valt één jaar vóór het effectief aanbieden

vergelijking (1), aanbod:  $a_n = -30 + 4p_{n-1}$

aanbod reageert met vertraging op de prijs

LEUVEN

## Vraag en aanbod: andere vergelijkingen

vergelijking (2), vraag:  $v_n = 150 - 5p_n$

vergelijking (3), evenwicht:  $v_n = a_n$

mechanisme:

prijs van jaar  $n - 1$  bepaalt aanbod van jaar  $n$   
in jaar  $n$  stijgt/daalt prijs om evenwicht te krijgen,  
d.w.z. om alles net verkocht te krijgen

er worden geen voorraden opgebouwd (product is bederfbaar, modegevoelig, ...)

vergelijking (4), begin:  $p_0 = 25$

LEUVEN

## Vraag en aanbod: evolutie van de prijs berekenen

$p_0 = 25$  rechtstreeks!  
 $a_1 = -30 + 4 \cdot 25 = 70$  via recursieve vergelijking  
 $v_1 = a_1 = 70$   
 $p_1 ?$  zo dat  $70 = 150 - 5p_1$   $p_1 = 16$   
 $a_2 = \dots$

LEUVEN

## Vraag en aanbod: recursievergelijking

$$(1) \quad a_n = -30 + 4p_{n-1}$$

$$(2) \quad v_n = 150 - 5p_n$$

$$(3) \quad v_n = a_n$$

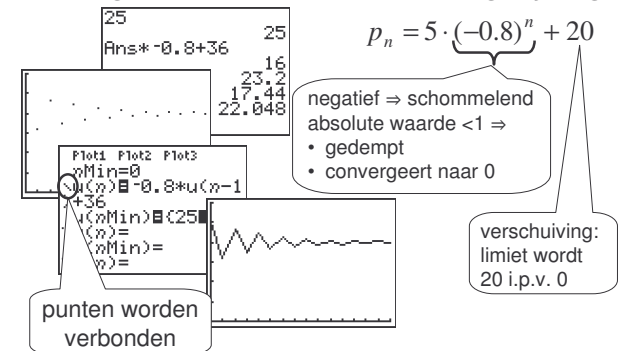
$$(1) \text{ en } (2) \text{ in } (3): -30 + 4p_{n-1} = 150 - 5p_n$$

...

$$p_n = -0.8p_{n-1} + 36$$

LEUVEN

## Vraag en aanbod: recursievergelijking



LEUVEN

## Vraag en aanbod: is ons model realistisch?

### Kerstboom schaars en duur

Wie de kerstfeer in huis wil halen, moet dit jaar wat dieper in zijn of haar portefeuille tasten. De gemiddelde prijs van de kerstbomen is met een kwart gestegen. Voor een „standaard“ boom betaal je vanaf tien euro, waar dat vorig jaar nog zo'n 7 euro was.

„Oorzaak is de instorting van de prijzen een paar jaar geleden“, legt kweker Hubert Diosa

uit Begijnendijk uit. „Particulieren hebben toen geen bomen meer geplant, waardoor er nu een schaarste is.“

Ook de duurdere kerstbomen stijgen in prijs. De populaire zilverspar, die minder makkelijk zijn naalden verliest, kost zo'n 15 euro. En voor de echt „exclusieve“ naaldbomen betaal je al snel 30 euro. (AF)

Lees blz. 8

LEUVEN

## Vraag en aanbod: is ons model realistisch?

in de realiteit ingewikkelder: b.v. vraag- en aanbodfunctie niet de hele tijd gelijk waardoor de coëfficiënten van de recursievergelijking veranderen, ...

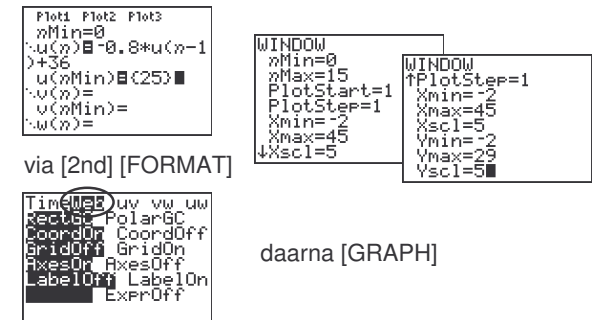
Echter:

Although many of the models we examine may at first seem to be gross simplifications, their very simplicity is a strength. Simple models show clearly the implications of our most basic assumptions.

(E.S. Allman, J.A. Rhodes, Mathematical Models in Biology, Cambridge University Press)

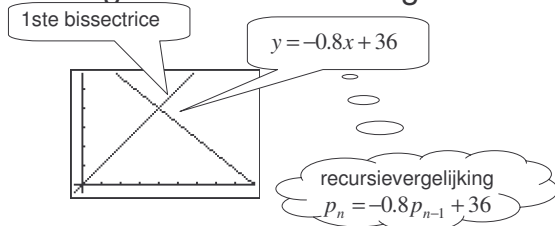
LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling



LEUVEN

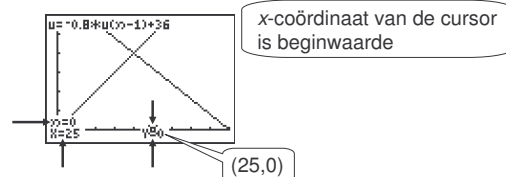
## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling



LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling

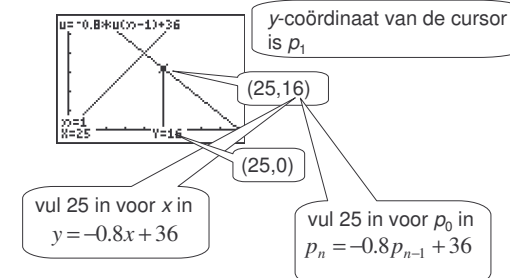
[TRACE]



LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling

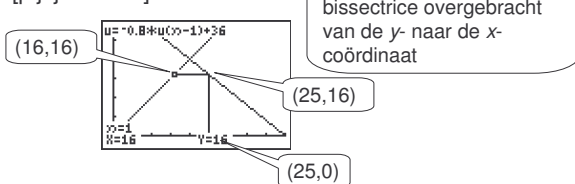
[pijltje rechts]



LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling

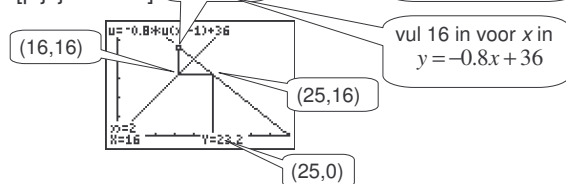
[pijltje rechts]



LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling

[pijltje rechts]

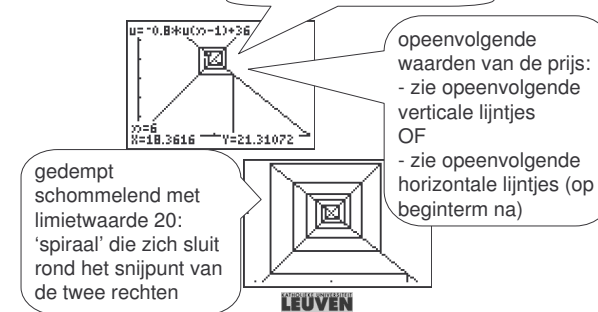


LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling

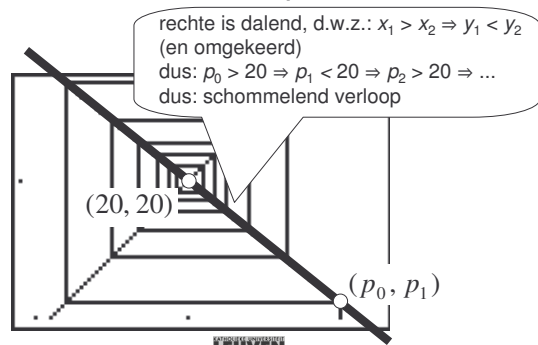
enzovoort

SPINNENWEBDIAGRAM



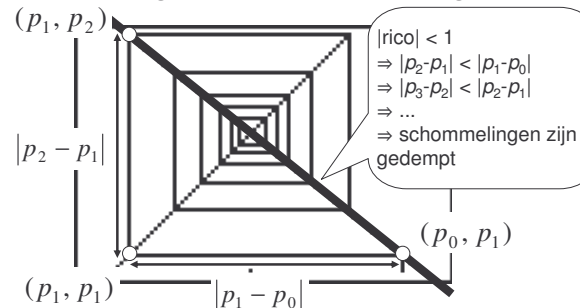
LEUVEN

## Vraag en aanbod: verklaring voor het verloop



LEUVEN

## Vraag en aanbod: alternatieve grafische voorstelling



LEUVEN

## Oefening: een ander discreet, dynamisch marktmodel

aan het werk!



antwoorden: zie volgende slides

LEUVEN



## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 1

$$p_0 = 25$$

$$a_0 = -30 + 4p_0 = -30 + 4 \cdot 25 = 70$$

$$v_0 = 150 - 5p_0 = 150 - 5 \cdot 25 = 25$$

vraag < aanbod  $\Rightarrow$  prijs zal dalen

$$p_1 - p_0 = 0.02 \cdot (v_0 - a_0) = 0.02 \cdot (25 - 70) = -0.9$$

$$p_1 = 25 - 0.9 = 24.1$$

LEUVEN

## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 2

$$p_1 = 24.1$$

$$a_1 = -30 + 4p_1 = -30 + 4 \cdot 24.1 = 66.4$$

$$v_1 = 150 - 5p_1 = 150 - 5 \cdot 24.1 = 29.5$$

vraag < aanbod  $\Rightarrow$  prijs zal verder dalen

$$p_2 - p_1 = 0.02 \cdot (v_1 - a_1) = 0.02 \cdot (29.5 - 66.4) = -0.738$$

$$p_2 = 24.1 - 0.738 = 23.362$$

LEUVEN

## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 3

$$p_{n+1} - p_n = 0.02 \cdot (v_n - a_n)$$

$$p_{n+1} - p_n = 0.02 \cdot ((150 - 5p_n) - (-30 + 4p_n))$$

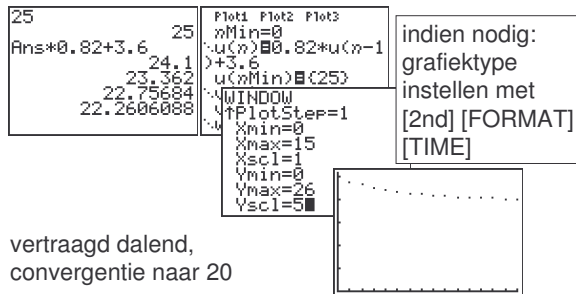
...

$$p_{n+1} = 0.82p_n + 3.6$$

$$p_n = 0.82p_{n-1} + 3.6$$

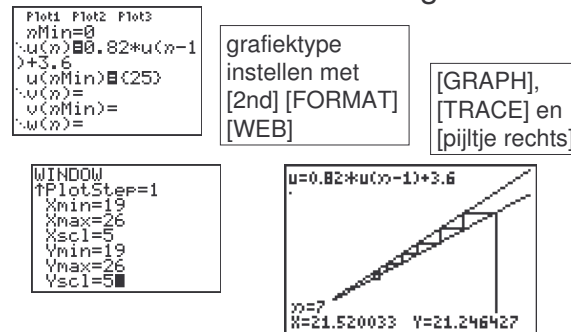
LEUVEN

## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 4, 5 en 6



LEUVEN

## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 7



LEUVEN

## Een ander discreet, dynamisch marktmodel – vraag 8

dalen / convergeren naar 20 gebeurt sneller of trager, verder geen veranderingen!

LEUVEN

Lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid

recursievergelijkingen van de vorm  $t_n + a \cdot t_{n-1} = b$  ( $a$  en  $b$  getallen)

via gelijkaardige berekening als voorheen:

$$t_n = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a} \quad \text{als } a \neq -1 \quad \begin{matrix} (C \text{ bepaald} \\ \text{door de} \\ \text{beginwaarde}) \end{matrix}$$

$a = -1$ : rekenkundige rij!

mogelijkheden verkennen m.b.v. spinnenwebdiagrammen



LEUVEN

Lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid

verschillende mogelijkheden voor het verloop:

- vertraagd stijgend/dalend naar een stabiele evenwichtswaarde
- versneld stijgend/dalend en divergent (limiet plus of min oneindig), met een niet-stabiele evenwichtswaarde
- uniform stijgend/dalend, divergent (limiet plus of min oneindig), geen evenwichtswaarde
- gedempt schommelen en convergerend naar een stabiele evenwichtswaarde
- explosief schommelen, divergent (geen limietwaarde), niet-stabiele evenwichtswaarde
- gelijkmatig schommelen, divergent, niet-stabiele evenwichtswaarde
- constant

LEUVEN

## Discrete logistische groei

een probleem met lineaire en exponentiële groei:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty \quad \text{(met } p_n \text{ het aantal individuen op tijdstip } n)$$

onbegrensde groei

logistische groei = groei met grenzen

LEUVEN

## Discrete logistische groei: voorbeeld

keukenrobot Aeternum

- iedereen die er een aankoopt, is er wild enthousiast over en maakt reclame bij vrienden en kennissen
- verder wordt er geen reclame gemaakt
- iedereen die er over hoort spreken, koopt het toestel aan
- het toestel gaat 'eeuwig' mee
- er zijn 100 000 gezinnen
- nu bezitten 5000 gezinnen een Aeternum

LEUVEN

## Discrete logistische groei

$p_n$  = aantal gezinnen dat een Aeternum bezit op tijdstip  $n$

principe 1: de hoeveelheid reclame is evenredig met  $p_n$

stel dat  $p_n = 95\ 000$ :

- er wordt veel reclame gemaakt ...
- ... maar in veel gevallen bij gezinnen die reeds een Aeternum bezitten
- de reclame is dus weinig effectief

principe 2: de effectiviteit van de reclame is evenredig met  $100\ 000 - p_n$

LEUVEN

## Discrete logistische groei

$p_n$  = aantal gezinnen dat een Aeternum bezit op tijdstip  $n$

uit principe 1 en 2:

$$p_{n+1} - p_n \text{ is evenredig met } p_n \times (100\ 000 - p_n)$$

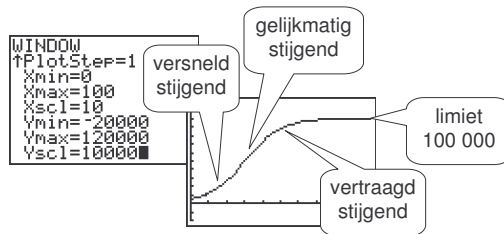
$$p_{n+1} - p_n = 0.000\ 001 \cdot p_n (100\ 000 - p_n)$$

$$p_{n+1} = -0.000\ 001 \cdot p_n^2 + 1.1 p_n$$

$$p_n = -0.000\ 001 \cdot p_{n-1}^2 + 1.1 p_{n-1}$$

LEUVEN

## Discrete logistische groei



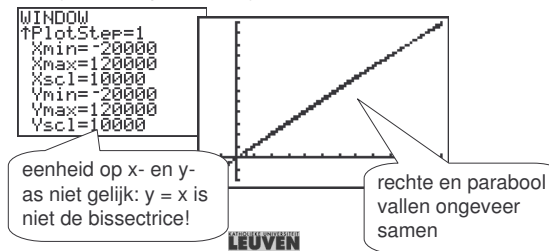
geen expliciete formule voor  $p_n$  gekend!

LEUVEN

## Discrete logistische groei: spinnenwebdiagram

$$p_n = -0.000\ 001 \cdot p_{n-1}^2 + 1.1 p_{n-1}$$

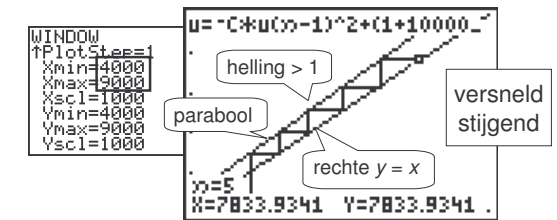
rechte  $y = x$  en parabool  $y = -0.000\ 001 x^2 + 1.1 x$



LEUVEN

## Discrete logistische groei: spinnenwebdiagram

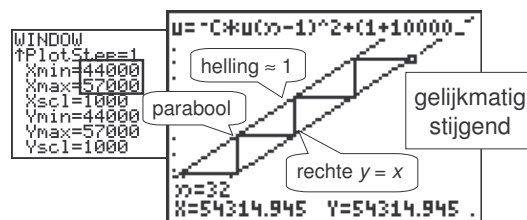
$$p_n = -0.000\ 001 \cdot p_{n-1}^2 + 1.1 p_{n-1}$$



LEUVEN

## Discrete logistische groei: spinnenwebdiagram

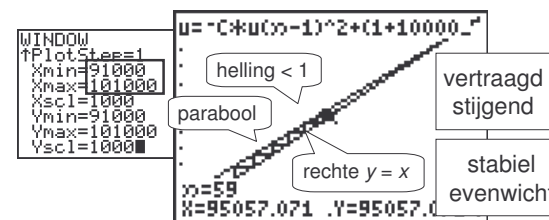
$$p_n = -0.000\ 001 \cdot p_{n-1}^2 + 1.1 p_{n-1}$$



LEUVEN

## Discrete logistische groei: spinnenwebdiagram

$$p_n = -0.000\ 001 \cdot p_{n-1}^2 + 1.1 p_{n-1}$$



LEUVEN

## Discrete logistische groei: 3 fasen

$$p_n - p_{n-1} = 0.000\ 001 \cdot p_{n-1} (100\ 000 - p_{n-1})$$

$$p_n - p_{n-1} = 0.1 \cdot p_{n-1} \left(1 - \frac{p_{n-1}}{100\ 000}\right)$$

$\approx 1 \text{ als } p_{n(-1)} \lll 100\ 000$

$$p_n - p_{n-1} \approx 0.1 \cdot p_{n-1} \text{ als ...}$$

$$p_n \approx 1.1 \cdot p_{n-1} \text{ als ...}$$

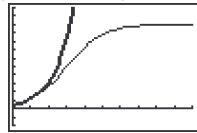
LEUVEN



## Discrete logistische groei

$$p_n \approx 1.1 \cdot p_{n-1} \text{ als } \dots \quad p_n \approx 5000 \cdot 1.1^n \text{ als } \dots$$

in de beginfase kan logistische groei benaderd worden door exponentiële groei



in de context van 'groei met grenzen' is exponentiële groei realistisch zolang het aantal individuen ver onder de draagkracht van de omgeving zit

LEUVEN

## Discrete logistische groei

middenfase: bij benadering lineaire groei

eindfase: bij benadering 'geremd exponentiële groei'

$$p_n - p_{n-1} = 0.000\,001 \cdot p_{n-1} (100\,000 - p_{n-1})$$

$$p_n - p_{n-1} = 0.1 \cdot \frac{p_{n-1}}{100\,000} (100\,000 - p_{n-1})$$

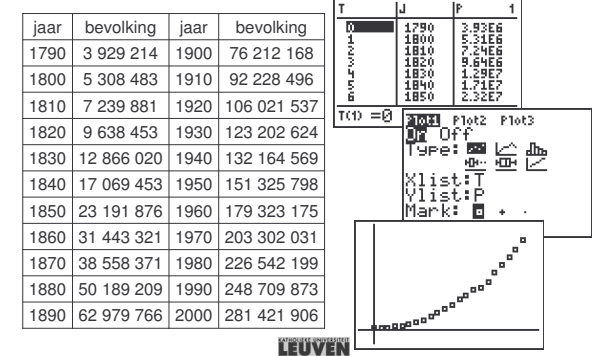
$$p_n - p_{n-1} \approx 0.1 \cdot (100\,000 - p_{n-1}) \text{ als } p_{n-1} \approx 100\,000$$

$$p_n \approx 0.9 p_{n-1} + 10\,000 \text{ als } \dots$$

$$p_n \approx C \cdot 0.9^n + 100\,000 \text{ als } \dots$$

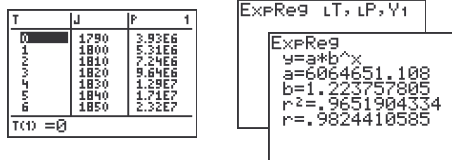
LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS



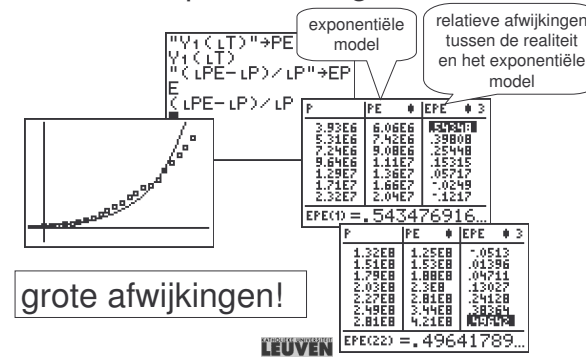
LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS: exponentiële groei?



LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS: exponentiële groei?



## Evolutie van de bevolking van de VS: logistische groei?

$$p_{n+1} - p_n = r \cdot p_n (K - p_n) \quad (K \text{ is de 'draagkracht' van de omgeving})$$

Hoe een goede  $r$  en  $K$  bepalen?

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = r \cdot (K - p_n) = -r p_n + rK = a p_n + b$$

groeisnelheid per individu, relatieve groeisnelheid

lineair verband!

$$r = -a \quad K = -\frac{b}{a}$$

LEUVEN

## Intermezzo: relatieve aangroei bij exponentiële groei

$$\text{exponentiële groei: } p_n = b \cdot g^n$$

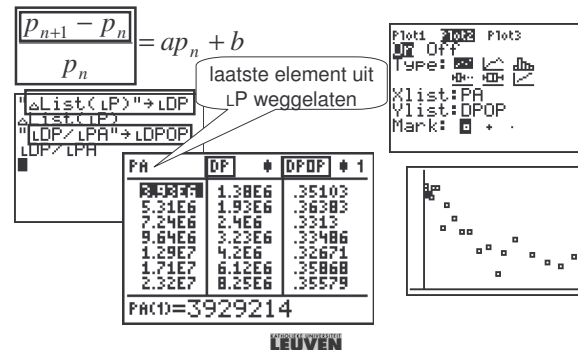
$$\frac{\Delta p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = g - 1$$

relatieve aangroei, aangroei per individu

... is constant!

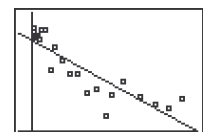
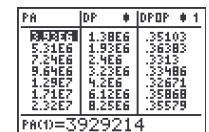
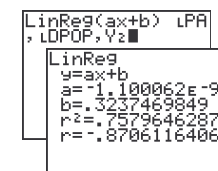
LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS: bepalen van $a$ en $b$



## Evolutie van de bevolking van de VS: bepalen van $a$ en $b$

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = a p_n + b$$



LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS: controle van het logistische model

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = ap_n + b \quad p_n = ap_{n-1}^2 + (1+b)p_{n-1}$$

```
LinReg
Y=Ax+B
a=-1.100062E-9
b=-.3237469849
r^2=.7579646287
r=-.8706116406
```

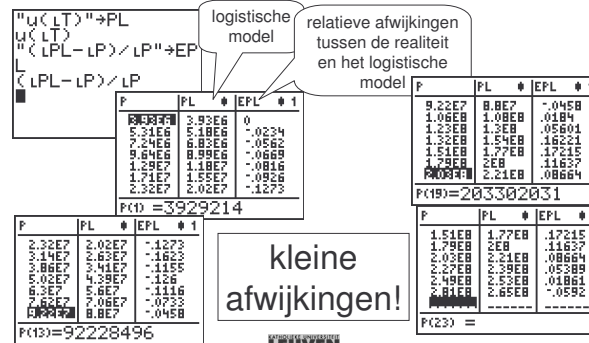
```
a→A
b→B
-1.10006177E-9
-.3237469849
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=A*u(n-1)^2
+(1+B)*u(n-1)
u(nMin)=39292...
v(nMin)=
w(n)=
```

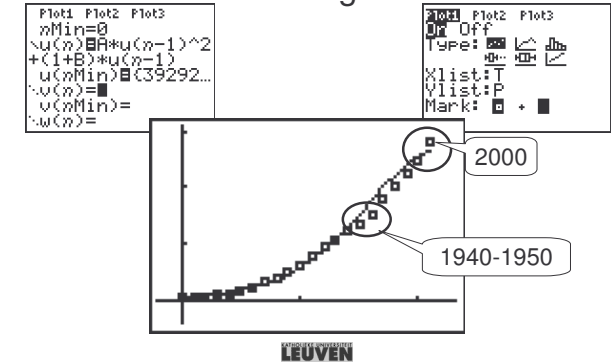
a en b via [VARS],  
5:Statistics

LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS: controle van het logistische model

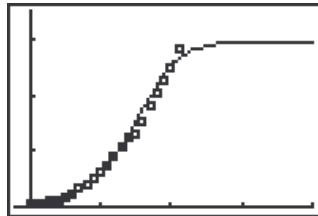


## Evolutie van de bevolking van de VS: controle van het logistische model



## Evolutie van de bevolking van de VS: controle van het logistische model

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=-2.1
Xmax=40
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=350000000
Yscl=100000000
```



draagkracht:

$$K = -\frac{b}{a} \approx 294\,000\,000$$

U.S. Census Bureau: in 2050 meer dan 400 miljoen

oorzaak: draagkracht is niet constant!

model 1790-1910: max. fout is 3.4%, draagkracht = 166 miljoen

LEUVEN

## Evolutie van de bevolking van de VS

In 1845 Verhulst prophesied a maximum population for Belgium of 6 600 000, and a maximum population for France of 40 000 000. Now, the population of Belgium in 1930 was already 8 092 000. This large discrepancy would seem to indicate that the logistic law of population growth is very inaccurate, at least as far as the population of Belgium is concerned. However, this discrepancy can be explained by the astonishing rise of industry in Belgium, and by the acquisition of the Congo which secured for the country sufficient additional wealth to support the extra population. Thus, after the acquisition of the Congo, Verhulst should have lowered the vital coefficient  $b$  [onze coefficient  $a$ ].

On the other hand, the population of France in 1930 was in remarkable agreement with Verhulst's forecast. [...]

M. Braun, Differential equations and ther applications, 1993.

LEUVEN