

Herintroductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs

Interventieonderzoek gebaseerd op een algebraïsch
perspectief

Ben VOS

Promotor: Prof. Dr. Johan Deprez

Lezers: Prof. Dr. Mieke De Cock
en Prof. Dr. Karel Dekimpe

Proefschrift ingediend tot het
behalen van de graad van
Educatieve Master of Science in de
wetenschappen en technologie

Academiejaar 2021-2022

© Copyright by KU Leuven

Zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van zowel de promotor(en) als de auteur(s) is overnemen, kopiëren, gebruiken of realiseren van deze uitgave of gedeelten ervan verboden. Voor aanvragen tot of informatie i.v.m. het overnemen en/of gebruik en/of realisatie van gedeelten uit deze publicatie, wend u tot de KU Leuven, Faculteit Wetenschappen, Celestijnenlaan 200H - bus 2100, 3001 Leuven (Heverlee), Telefoon +32 16 32 14 01.

Voorafgaande schriftelijke toestemming van de promotor(en) is eveneens vereist voor het aanwenden van de in dit afstudeerwerk beschreven (originele) methoden, producten, schakelingen en programma's voor industrieel of commercieel nut en voor de inzending van deze publicatie ter deelname aan wetenschappelijke prijzen of wedstrijden.

Voorwoord

De keuze om mijn masterthesis te maken rond de herintroductie van groepentheorie in het middelbaar onderwijs heeft verschillende redenen. De eerste reden die ik hierbij zou willen aanhalen is het feit dat ik gedurende mijn opleiding binnen de bachelor wiskunde en de educatieve masteropleiding die ik nu volg steeds sterk geboeid was door de onderwerpen die gelieerd kunnen worden aan abstracte algebra. Daarnaast heb ik ook een hart dat klopt voor het Vlaamse secundair onderwijs. Mijn toekomst ligt niet in het wiskundig onderzoek of het wiskundendidactiekonderzoek, en dus ik zocht een onderwerp dat zo veel mogelijk aansloot bij de onderwijspraktijk. Deze twee argumenten kwamen mooi bij elkaar in het voorgestelde onderwerp van deze thesis en vandaar was mijn keuze snel gemaakt.

Vooraleer ik deze masterproef voorstel wil ik graag van dit voorwoord gebruik maken om een aantal mensen te bedanken voor hun hulp bij de totstandkoming van deze masterproef. Ten eerste wil ik vooral een woord van dank richten tot mijn promotor, prof. dr. Johan Deprez, voor de intensieve begeleiding gedurende het ganse academiejaar. Zijn stroom aan tips en opmerkingen hebben geholpen deze masterproef tot een goed einde te brengen. Zijn expertise, gefundeerde meningen en bemoedigende woorden hebben ervoor gezorgd dat het afgelegde traject doorheen het jaar nu succesvol afgesloten kan worden in deze thesis. Daarnaast gaf hij mij ook de kans om mijn uitgevoerde masterproefonderzoek te presenteren tijdens een uitwisselingsproject tussen de KU Leuven en de universiteit van Utrecht, een ervaring die ik zonder hem niet zou hebben opgedaan.

Verder zou ik alle leerkrachten en leerlingen die deelnamen aan dit onderzoek willen bedanken. Zonder hen was dit onderzoek nooit mogelijk geweest. Dankzij het enthousiasme en de expertise van de leerkrachten kon ik de lessenreeks nog meer verfijnen en aanpassen aan de lespraktijk. Zowel de leerkrachten als de leerlingen zetten door deze lessenreeks uit te testen een stap in het onbekende, waarvoor ik hen uitvoerig wil danken.

Ten slotte wil ik nog een dankwoordje richten tot naaste familie en mijn vrienden voor hun steun tijdens het maken van deze masterproef en voor hun niet-aflatende steun gedurende de voorbije vijf jaren waarin ik de stap zette van een aan zichzelf twijfelende beginnende wiskundestudent naar een leerkracht die klaar is voor het echte werk.

Contribution statement

De experimentele lessenreeks die centraal staat in deze masterproef werd zelf ontworpen. Het lesmateriaal werd verfijnd op basis van feedback van enerzijds de promotor van dit onderzoek en de deelnemende leerkrachten. Zo werd de presentatie die bij het eerste lesblok van de lessenreeks hoort grotendeels vormgegeven en aangepast op basis van de grondige feedback van een van de leerkrachten die het onderzoek mee vormgegeven hebben. De instap van de lessenreeks werd hoofdzakelijk gebaseerd op de werkwijze rond de intuïtieve exploratie rond het begrip tegenovergestelden zoals aangebracht in het onderzoek van Leron en Eijersbo (2016) en de werkwijze rond het rigoureuus oplossen van vergelijkingen zoals ook het geval is in de onderzoeken van Dorier (1995) en Wasserman (2014). Tijdens het eerste lesblok werd er gebruik gemaakt van een filmpje dat gemaakt werd door Staff (2015). De symmetrieën van een vierkant en de daarbij horende groep D_4, \circ werden geïntroduceerd via een ander filmfragment dat oorspronkelijk gemaakt werd door Learnifyable (2014). Bij het zoeken naar oefeningen werd er inspiratie opgedaan bij de Vlaamse Wiskunde Olympiade, meer bepaald bij de tweede oefening van het tweede lesblok van de lessenreeks. Alle meetinstrumenten voor het onderzoek werden volledig zelf gemaakt en de data werden vervolgens ook zelf verzameld en geanalyseerd.

Samenvatting

De Vlaamse overheid besliste om met de invoering van de nieuwe eindtermen een specifieke eindterm rond groepentheorie toe te voegen aan het pakket eindtermen gevorderde wiskunde. Dit gevorderd pakket eindtermen, met de leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs die minstens zes lestijden wiskunde per week hebben als doelgroep, zal normaliter in voege treden vanaf het schooljaar 2023-2024. Het hoofddoel van deze nieuwe eindterm rond groepentheorie is om de leerlingen te laten kennismaken met een onderdeel uit de abstracte en zuivere wiskunde, wat nergens anders in het curriculum uitgesproken naar voren komt. Daarnaast krijgen de leerlingen door middel van deze eindterm een beeld van hoe de wiskunde als wetenschap vandaag de dag bedreven wordt.

De wetenschappelijke literatuur rond het leren en onderwijzen kunnen we opdelen in twee gedeeltes. Aan de ene kant zijn er bredere theoretische denkkaders aanwezig die toegepast kunnen worden op het leren en onderwijzen van groepentheorie. Voorbeelden hiervan zijn de zogenaamde APOS-theorie en de theorie van ‘reducing abstraction’. Een ander theoretisch denkkader dat toegepast kan worden op het leren en onderwijzen van groepentheorie is guided reinvention, wat kadert binnen de visie van het realistisch wiskundeonderwijs. Bij guided reinvention staat het idee centraal dat de lerende de definitie van het te leren concept zelf moet kunnen herontdekken, waarbij de leerkracht optreedt als een gids. Via goed gekozen opdrachten die in herkenbare contexten kunnen de leerlingen zelf de eigenschappen definities van een te leren wiskundig concept herontdekken. De leerkracht neemt hierbij zijn rol als gids op door de leerlingen door middel van gerichte bijvragen en discussies in de juiste richting te helpen. Larsen (2013) ontwikkelde een zogenaamde lokale instructietheorie die vertrekt vanuit het experimenteren met symmetrieën van gelijkzijdige driehoeken om vanuit deze meetkundige blik toe te werken naar de definitie van een groep in het gedachtegoed van guided reinvention.

Aan de andere kant is er ook wetenschappelijke literatuur aanwezig die zich specifiek richt op het leren en onderwijzen van groepentheorie. Leron en Eijersbo (2016) ontwikkelden bijvoorbeeld een opeenvolging van workshops waarbij de essentiële concepten uit de definitie van een groep aangebracht worden via een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde. Andere bronnen zoals deze van Dorier (1995) en Wasserman (2014) onderzochten hoe er toegewerkt kan worden naar de definitie van een groep door te werken met het rigoureuus oplossen van (lineaire) vergelijkingen.

In dit onderzoek ontwikkelden we een eigen experimentele lessenreeks gebaseerd op een algebraïsch perspectief die bedoeld is voor leerlingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. We baseerden ons op de visie van guided reinvention. We combineerden hierbij de werkwijze van de intuïtieve exploratie van tegenovergestelden uit Leron en Eijersbo (2016) en de werkwijze in verband met het rigoureuus oplossen van vergelijkingen om toe te werken naar de definitie van een groep. In het tweede gedeelte van de lessenreeks worden onderwerpen behandeld die verder gaan dan de doelstellingen uit de eindterm, waarbij we focusten op een hoofdzakelijk algebraïsche benadering van het concept groep. We koppelden hieraan de volgende drie onderzoeksvragen:

1. Is de aanpak vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen effectief om de leerlingen zelf tot alle axioma's in de definitie van een groep te laten komen?
2. Slaagt deze lessenreeks rond groepentheorie met hoofdzakelijk algebraïsche voorbeelden erin om de leerlingen de beoogde leerdoelen te laten behalen en hen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?
3. Slaagt deze lessenreeks erin om de leerlingen te laten kennismaken met een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde en welk effect heeft dit op de leerlingen?

Onze lessenreeks werd uitgetest in drie verschillende klasgroepen bij in het totaal 36 leerlingen. De lessenreeks werd in de drie deelnemende scholen onderwezen tijdens de twee seminarie-uren die leerlingen met

acht uur wiskunde per week meer hebben dan leerlingen met zes uur wiskunde per week. Om een antwoord te formuleren op deze onderzoeksvragen werden er kwalitatieve data verzameld bij zowel de leerkrachten die de lessenreeks uittesten als bij de leerlingen uit de desbetreffende klasgroepen. De leerkrachten vulden na elke les een logboek in en werden na de lessenreeks geïnterviewd. De leerlingen legden na de lessenreeks een toets af en per klasgroep werden er twee leerlingen uitgenodigd voor een interview. In de volgende alinea's vatten we onze antwoorden op de drie onderzoeksvragen samen.

1. De instap die vertrekt vanuit de intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en via het rigoureuze oplossen van vergelijkingen naar de definitie van een groep toewerkt is bij ons testpubliek effectief geweest om de leerlingen zelf tot alle axioma's van een groep te laten komen. De leerlingen konden met het denkbeeld van guided reinvention in het achterhoofd zelf alle elementen uit de definitie van een groep herontdekken en opnoemen. Uit de toets blijkt ook dat de leerlingen na de lessenreeks de definitie van een groep nog altijd goed onder de knie hebben. Dit positieve beeld kunnen we nog wat nuanceren door te vermelden dat sommige leerlingen de gebruikte aanpak maar wat vaag vonden, hoewel deze mening niet algemeen verspreid was in het geïnterviewde leerlingenpubliek.
2. Uit de resultaten van het onderzoek blijkt dat de leerlingen door middel van de lessenreeks gebaseerd op een algebraïsch perspectief in staat zijn om te voldoen aan de eindterm. Het beeld op de onderdelen van de lessenreeks die verder gaan dan de eindterm is ook overwegend positief, met enkele nuanceringen. De vrij goede toetsresultaten stellen ons hoopvol, maar de leerkrachten hebben soms hun twijfels over het uiteindelijke niveau van de leerlingen bij deze diepgaandere onderwerpen.
3. De lessenreeks slaagt er volgens de leerkrachten in om op een begrijpelijke manier de leerlingen een beeld te geven van een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde. De leerkrachten geven aan dat de leerlingen het abstractieniveau van de lessenreeks aankunnen. Aan de andere kant worden de verschillen tussen de leerlingen wel groter, ook op het vlak van interesse en enthousiasme

Summary

With the emergence of the new attainment goals in Flemish secondary education, the Flemish government decided to add a new final term on group theory. This final term is intended for students in 11th and 12th grade of high school with at least six hours of mathematics per week. This final term will normally be implemented starting from the school year 2023-2024. The primary goal of the final term is to introduce students from Flemish secondary schools to a new kind of abstract and pure mathematics that they have not encountered before. Next to that, this new final term gives them the opportunity to see how mathematics is being performed as a scientific field nowadays.

The scientific literature involving the learning and teaching of group theory can be splitted into two parts. On the one side there are more broad theoretical frames that can be applied to the learning and teaching of group theory. Two of these theoretical frames are the so-called APOS theory and the theory of reducing abstraction. Another theoretical frame is the so-called point of view of guided reinvention, which can be linked to the vision of realistic mathematics education. In guided reinvention, students rediscover for themselves the definitions and properties of a certain mathematical concept through well-chosen assignments that are placed in recognizable contexts and models. The teacher appears as a sort of guide in this process of rediscovery by keeping the students on the right track by asking the right additional questions and starting discussions. Larsen (2013) developed a local instruction theory with a geometrical point of view in which the definition of a group can be rediscovered by students starting from an experimental phase in which they work with the symmetries of an equilateral triangle.

On the other hand, there is also scientific literature available that is specifically oriented on the learning and teaching of group theory. Leron en Eijersbo (2016) for example developed a series of workshops in which the essential concepts in the definition of a group are introduced by working with an intuitive exploration of the concept of opposites. Next to that, Drier (1995) and Wasserman (2014) inquired how one can go to the definition of a group by analyzing systematically how linear equations are formally solved.

In our research we developed an experimental instructional sequence intended for students in Flemish secondary schools. We used the point of view of guided reinvention as basis to do this. We combined the method of the intuitive exploration of the opposite concept as described by Leron en Eijersbo (2016) and the method of formally solving linear equations to reach to the definition of a group. In the second part of the instructional sequence we expanded on the objectives as posed by the final term. We posed the following three research questions:

1. Is the method starting from an intuitive exploration and the method of formally solving linear equations effective for letting the pupils rediscover all the axioms in the definition of a group?
2. Is our instructional sequence which was based on an algebraic point of view able to fulfil the new final term and the expanded goals of our instructional sequence?
3. Is our instructional sequence able to let the students encounter with a part of the abstract and pure mathematics and which effects does this have on them?

To answer the sub-questions, the instructional sequence was tested in three classes from the Flemish secondary education with 36 pupils in total. The instructional sequence was taught during the two seminar hours that students with eight hours of math per week have more than students with six hours of math per week. Qualitative data was collected from both the teachers who tested the instructional sequence in their own class and the students from these different class groups. The teachers filled in a survey after every lesson. Also the teachers and several pupils were interviewed and the students filled out a closing test with which we could check whether the concepts have been understood by them. In the following paragraphs we formulate an answer to our three research questions.

1. The method that was used in our instructional sequence involving the intuitive exploration of the opposite concept and the formally solving of linear equations was effective at our test public to let the pupils rediscover the definition of a group. From the test also appeared that the pupils remembered the definition of a group well after the instructional sequence. This positive view can be nuanced. Some pupils mentioned that this working method seemed unclear to them, but this opinion was not present in general at the group of interviewed pupils.
2. From the results of our inquiry we can conclude that the instructional sequence which was principally based on an algebraic perspective is able to let the pupils fulfil the needs as posed in the new final term. Also the view involving the parts of the instructional sequence that go further than the components that are mentioned in the final term is mostly positive. The good results of the pupils on the test give us hope, but the teachers have doubts according to the level of the pupils with regard to the more profound subjects of the instructional sequence.
3. The instructional sequence that we developed in this research is able to let the students encounter with a part of the abstract and pure mathematics. The teachers mention that the pupils are able to cope with the rate of abstraction of our instructional sequence. Nevertheless, the instructional sequence ensures that the differences between the pupils become greater, especially with regard to the enthusiasm and interest of the pupils throughout the instructional sequence.

Lijst van figuren, tabellen en gebruikte afkortingen

Lijst van figuren

1	Lijst van tussenstappen met bijhorende aannames en groepsaxioma's voor het rigoureuus oplossen van de vergelijking $x + 5 = 12$ zoals gebruikt in het onderzoek van Wasserman (2014). Bron: Wasserman (2014, pg.196)	30
2	Lijst van tussenstappen met bijhorende aannames en groepsaxioma's voor het rigoureuus bewijzen van de uitspraak $xTa = b \iff x = bT(a^{-1})$ zoals gebruikt in het onderzoek van Dorier (1995). Bron: Dorier (1995, pg.186)	31
3	Vergelijking van het aantal wetenschappelijke bronnen dat pleit voor het gebruiken van oplossen van vergelijkingen of symmetrieën als instap om naar de definitie van een groep toe te werken, zoals opgesteld door Veith en Bitzenbauer (2022). Bron: Veith en Bitzenbauer (2022, pg.8)	35

Lijst van tabellen

1	Overzicht van het leerlingenpubliek waarbij de lessenreeks is uitgetest.	37
2	Overzicht van de punten behaald door de leerlingen uit school A op vraag 1b van de toets. Het maximaal te behalen aantal punten is 5.	55
3	Overzicht van de punten behaald door de leerlingen uit school B op vraag 1b van de toets. Het maximaal te behalen aantal punten is 5.	55

Lijst van gebruikte afkortingen

- APOS: Actie - Proces - Object - Schema
- TAAFU: Teaching Abstract Algebra For Understanding
- ASO: Algemeen Secundair Onderwijs

Inhoudsopgave

1	Inleiding	10
2	Een herinleiding van groepentheorie in het wiskundecurriculum van het secundair onderwijs	12
3	Drie brede theoretische denkkaders toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie	14
3.1	De APOS-theorie	14
3.1.1	De APOS-theorie: definities en onderlinge samenhang	14
3.1.2	De APOS-theorie toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie	15
3.2	Guided reinvention in het kader van het realistisch wiskundeonderwijs	16
3.2.1	Guided reinvention toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie	17
3.3	Reducing abstraction	19
3.3.1	Reducing abstraction toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie	19
3.4	Onderlinge samenhang tussen de drie visies	20
3.4.1	Overeenkomsten tussen de APOS-theorie en guided reinvention	20
3.4.2	Overeenkomsten tussen de APOS-theorie en reducing abstraction	20
4	Wetenschappelijk onderzoek specifiek gericht op het leren en onderwijzen van groepentheorie	22
4.1	Vaak terugkomende moeilijkheden en misconcepties	22
4.2	Creatieve ideeën om een lessenreeks rond groepentheorie vorm te geven	24
4.3	Wat is het tegenovergestelde van een kat?	24
4.3.1	Doel en werkwijze van het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016)	24
4.3.2	Concrete uitwerking lessequenties in vier delen	25
4.3.3	Conclusies van het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016)	29
4.4	Link tussen inversen, het oplossen van vergelijkingen en groepentheorie	29
4.5	Een meetkundige blik, obligatoir of niet?	32
4.5.1	APOS en de fundamentele van de groepentheorie: de discussie Burn-Dubinsky	32
4.5.2	Guided reinvention: meetkunde als verplichte bondgenoot?	33
4.5.3	Samenvattende studie over deze kwestie: Veith en Bitzenbauer, 2022	34
4.5.4	Conclusie: een meetkundige blik, obligatoir of niet?	35
5	Opzet van een interventieonderzoek rond groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs	37
5.1	Instap: vanuit het begrip tegenovergestelde naar de axioma's van een groep	37
5.1.1	Instap van de lessenreeks: bredere filosofie	38
5.1.2	Concrete uitwerking: vanuit het begrip tegenovergestelde naar de axioma's van een groep	38
5.1.3	Onderzoeksvraag 1 en methodologie	41
5.2	Groepentheorie vanuit een hoofdzakelijk algebraïsch perspectief: vervolg van de lessenreeks	43
5.2.1	Onderzoeksvraag 2	45
5.3	De lessenreeks als een uitstap naar de onbekende abstracte kant van de zuivere wiskunde	47
5.3.1	Onderzoeksvraag 3	47
6	Resultaten en conclusies	49
6.1	Resultaten in verband met onderzoeksvraag 1	49
6.1.1	Terugblik van de leerkrachten op het eerste lesblok: algemeen beeld en guided reinvention	50
6.1.2	Meest opvallende moeilijkheden: nauwkeurig oplossen van de lineaire vergelijking	51
6.1.3	Meest opvallende moeilijkheden: verwarring associativiteit-commutativiteit	52

6.1.4	Positie van de leerlingen ten opzichte van de intuïtieve aanpak?	53
6.1.5	Hoe goed onthouden de leerlingen de definitie van een groep?	54
6.1.6	Conclusie eerste onderzoeksvraag	55
6.2	Resultaten in verband met onderzoeksvraag 2	56
6.2.1	Slaagt de lessenreeks erin om de leerlingen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm? .	56
6.2.2	Wat met de doelen van de lessenreeks die verder gaan dan de eindterm?	59
6.2.3	Conclusie tweede onderzoeksvraag	62
6.3	Resultaten in verband met onderzoeksvraag 3	63
6.3.1	De leerkrachten over de abstractie en zuiverheid van de lessenreeks	63
6.3.2	De leerkrachten over het effect van de abstractie van de lessenreeks op de leerlingen .	64
6.3.3	De leerlingen over de abstractie en zuiverheid van de lessenreeks	66
6.3.4	Conclusie derde onderzoeksvraag	68
7	Discussie	69
7.1	Verwarring tussen associativiteit en commutativiteit?	69
7.2	Op welke manieren de lessenreeks nog aanpassen: nood aan meer oefenstof	70
7.3	Wat met de abstractie van de lessenreeks?	71
7.4	Nood aan meer meetkunde in de lessenreeks?	72
7.5	Sterktes en zwaktes van het onderzoek	73
7.6	Suggesties voor verder onderzoek	73
8	Bibliografie	75
9	Bijlagen	77
9.1	PowerPointpresentaties gebruikt bij de lessenreeks	78
9.2	Uitgewerkt gedetailleerd draaiboek eerste lesblok	133
9.3	Vragen logboek	143
9.4	Interviewleidraad leerkrachten	147
9.5	Interviewleidraad leerlingen	151
9.6	Opgestelde toets die afgenomen werd na de lessenreeks	154
9.7	Resultaten toets klasgroepen A en B	159

1 Inleiding

Wat is een groep? Wanneer je deze vraag stelt aan een wiskundige of aan een leerling uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs dan verwacht je dat deze mensen op een heel andere manier een antwoord zullen formuleren op deze vraag. Het is namelijk zo dat een leerling uit de derde graad van het secundair onderwijs nooit uit zichzelf de definitie van een groep als algebraïsche structuur binnen de wiskunde zal geven om op deze vraag te antwoorden. Waar zou deze leerling deze definitie immers ooit moeten zijn tegengekomen? Wel, binnen enkele jaren zou dit beeld misschien wel eens grondig kunnen veranderen en zou je misschien vaker het wiskundige antwoord op de vraag te horen kunnen krijgen, ook uit de mond van de leerling uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs!

De Vlaamse overheid besliste immers om met de invoering van de nieuwe eindtermen een specifieke eindterm rond groepentheorie toe te voegen aan het pakket eindtermen gevorderde wiskunde. Dit gevorderd pakket eindtermen, met de leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs die minstens zes lestijden wiskunde per week hebben als doelgroep, zal normaliter in voege treden vanaf het schooljaar 2023-2024. Merk hierbij het gebruik van het woord normaliter in de vorige zin op. Verscheidene partijen met de katholieke onderwijskoepel in een hoofdrol hebben de invoering van deze nieuwe eindtermen, waartoe ook de eindterm groepentheorie behoort, aangevochten. Het Grondwettelijk Hof gaf hen op 16 juni 2022 hierbij uiteindelijk gelijk. Deze verwickelingen speelden zich af tijdens de periode waarin dit masterproefonderzoek is uitgevoerd. Bij de aanvang en de uitvoering van dit masterproefonderzoek ging iedereen ervan uit dat de nieuwe eindtermen in voege gingen treden voor de derde graad vanaf het schooljaar 2023-2024. Op het moment dat deze tekst geschreven wordt is er ook nog niet duidelijk hoe het er in de komende schooljaren op het vlak van leerinhouden aan toe zal gaan in het secundair onderwijs naar aanleiding van de vernietiging van de nieuwe eindtermen door het Grondwettelijk Hof. Blijft de nieuwe specifieke eindterm rond groepentheorie naar de toekomst toe behouden of niet? Dit is op dit moment niet geweten maar in het verdere verloop van de tekst zullen we steeds aannemen dat deze behouden blijft. Anders zouden we immers altijd onder voorbehoud moeten spreken wanneer we het in het verdere verloop van deze thesis hebben over de invoering van deze eindterm.

Wanneer groepentheorie in de nabije toekomst een plaats krijgt in het wiskundecurriculum van het Vlaamse secundair onderwijs dan is er nood aan praktische uitwerkingen van lessenreeksen rond groepentheorie met dit specifieke publiek als doelpubliek. Groepentheorie zal immers voor vele leerkrachten wiskunde die in het hoger onderwijs een meer toegepaste of economische opleiding gevolgd hebben niet meteen een belletje doen rinkelen. Ook voor leerkrachten waarbij de inhouden uit de opleiding wiskunde niet meer vers in het geheugen liggen zal een uitgewerkte lessenreeks een goede houvast zijn om de eindterm in hun klassen te kunnen realiseren. Voor deze masterthesis hebben we een lessenreeks groepentheorie ontwikkeld die gebaseerd is op een hoofdzakelijk algebraïsch perspectief. Vervolgens werd deze lessenreeks uitgetest in drie verschillende scholen binnen de ruime regio Kempen. Hierbij hebben we beslist om de inhoud van de lessenreeks niet louter te beperken tot de concepten van de groepentheorie die aangegeven staan in de eindterm maar gaan we ook dieper in op enkele meer gevorderde en abstracte onderwerpen die gelinkt kunnen worden aan groepentheorie.

De hoofdttekst van deze masterthesis valt grotendeels uiteen in twee delen. In het eerste gedeelte voeren we een literatuuronderzoek uit en in het tweede gedeelte beschrijven we het door ons uitgevoerde interventieonderzoek. Het literatuuronderzoek hebben we nog opgesplitst in drie verschillende delen. In het eerste hoofdstuk van de literatuurstudie gaan we in op de nieuwe specifieke eindterm rond groepentheorie en bespreken we de huidige en vroegere positie van groepentheorie in het Vlaamse onderwijslandschap.

In het tweede gedeelte van het literatuuronderzoek stellen we drie brede theoretische denkkaders voor die toegepast kunnen worden op het leren en onderwijzen van groepentheorie. We zullen hierbij in volgorde de APOS-theorie, guided reinvention in het kader van het realistisch wiskundeonderwijs en de theorie van reducing abstraction bespreken. We bekijken hierbij deze drie denkkaders steeds in een bredere context,

waarna we deze vervolgens meer toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie onder de loep nemen.

Het derde en laatste gedeelte van het literatuuronderzoek gaat over wetenschappelijk onderzoek dat specifiek gericht is op het leren en onderwijzen van groepentheorie. Eerst bekijken we enkele vaak terugkomende moeilijkheden en misconcepties waar leerlingen en leerkrachten mee te maken krijgen wanneer er groepentheorie onderwezen wordt. Daarna bekijken we enkele creatieve ideeën uit de wetenschappelijke literatuur om een lessenreeks rond groepentheorie vorm te geven. Vervolgens staan we stil bij de meer algebraïsch geïnspireerde bronnen uit het wetenschappelijk onderzoek rond de aanbrengh van groepentheorie, waarbij we eerst uitvoerig de paper “What’s the opposite of a cat?” van Leron en Ejersbo (2016) bespreken om daarna in te gaan op de link tussen inversen, het oplossen van vergelijkingen en groepentheorie. Tot slot onderzoeken we met behulp van de wetenschappelijke literatuur de vraag of een meetkundige blik obligatoir is bij het ontwikkelen van een lessenreeks groepentheorie.

Op basis van de literatuur ontwikkelden we een lessenreeks groepentheorie vanuit een algebraïsch uitgangspunt. Deze lessenreeks werd vervolgens uitgetest. We koppelden hier drie verschillende onderzoeksvragen aan. Bij het beantwoorden van deze onderzoeksvragen hechtten we belang aan zowel de ervaringen van de deelnemende leerkrachten en de leerlingen. De opbouw van de lessenreeks, de daarbij horende onderzoeksvragen en de gebruikte methodologie worden uitvoerig voorgesteld en besproken in hoofdstuk 5.

Nadat we de opzet van ons interventieonderzoek hebben toegelicht, bespreken we in hoofdstuk 6 de resultaten van het onderzoek en formuleren we conclusies op de drie onderzoeksvragen. Ten slotte hebben we in de discussie aandacht voor de sterktes en zwaktes van onze eigen ontwikkelde experimentele lessenreeks en doen we enkele suggesties voor eventueel toekomstig onderzoek.

2 Een herinleiding van groepentheorie in het wiskundecurriculum van het secundair onderwijs

Bij de recente herschikking van de eindterm voor het Vlaamse secundair onderwijs werd er beslist dat groepentheorie vanaf het schooljaar 2023-2024 opnieuw geïntroduceerd zal worden in het wiskundecurriculum. De leerlingen die vallen onder het pakket van specifieke eindtermen wiskunde, zijnde leerlingen met zes uren wiskunde per week, zullen vanaf dat schooljaar opnieuw tijdens hun wiskundelessen ingewijd worden in de wereld van de groepentheorie. Binnen de commissie die de eindtermen voor wiskunde vormgegeven heeft heerste er immers de mening dat de leerlingen met het sterkste pakket wiskunde in de derde graad van het secundair onderwijs nood hadden aan een introductie in een meer zuivere en abstracte kamer van de wiskunde in vergelijking met de onderwerpen die op dat moment aan bod kwamen in de vorige set van eindtermen. Professor Deprez, de promotor van dit onderzoek die ook betrokken was bij de besprekingen bij de invoering van deze eindterm, gaf aan dat er naast groepentheorie nog enkele alternatieven op tafel lagen die de leerlingen een blik op de abstracte en zuivere kant van de wiskunde konden geven. Zo werd er bijvoorbeeld gedacht aan een uitbreiding rond de bestaande maar eerder beperkte eindterm rond vectorruimten en aan de invoering van het begrip orderrelaties met de daarbij horende tralies als meer abstracte objecten. Uiteindelijk werd de keuze gemaakt om een eindterm te formuleren rond de introductie van groepen. Binnen de groepentheorie zijn er immers rijkere en spannendere voorbeelden te vinden die de deur openen naar de hedendaagse zuivere wiskunde zoals deze ook in onderzoeksmiddelen bedreven wordt. Ook is groepentheorie volgens de commissie een goed middel om de leerlingen abstracter te leren werken. De exacte formulering van de nieuwe specifieke eindterm staat hieronder afgebeeld:

Specifieke eindterm 6.4.14

De leerlingen onderzoeken verzamelingen voorzien van een bewerking via groepentheorie. Met inbegrip van kennis:

Feitenkennis:

- Vakterminologie en notaties inherent aan de afbakening van de specifieke eindterm

Conceptuele kennis:

- Groep, commutatieve groep
- Unicité van het neutraal element en van de inverse van een element
- Groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n , een symmetriegroep van een meetkundige figuur, een getallenverzameling
- Cayleytabel van eindige groepen

Procedurele kennis:

- Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt
- Rekenen in groepen

Met inbegrip van dimensies eindterm: Cognitieve dimensie: beheersingsniveau analyseren

Vervolgens kunnen we het even hebben over de huidige en vroegere positie van groepentheorie in het Vlaamse onderwijslandschap. De invoering van de nieuwe specifieke eindterm rond groepentheorie voor de richtingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs met het sterkste wiskundepakket toont aan dat groepentheorie vandaag de dag geen significant deel uitmaakt van het wiskundecurriculum in het Vlaamse secundair onderwijs. Binnen het huidige leerplan voor de wiskundig sterkste studierichtingen in de derde graad van het gemeenschapsonderwijs staat er wel beschreven dat wiskundige structuren in de les

onderzocht kunnen worden, waartoe ook groepen behoren, maar dit neemt in de praktijk geen prominente plaats in. Wie anno 2022 als leerling, of beter gezegd student, een volwaardige en uitgebreide lessenreeks rond groepentheorie wil krijgen moet zich naar de meer wiskundig georiënteerde opleidingen in het universitair onderwijs begeven. Aan de KU Leuven wordt groepentheorie hoofdzakelijk onderwezen binnen de eerste jaren van de bacheloropleiding wiskunde. Het opleidingsonderdeel Algebraïsche Structuren, waarin deze leerlingen een eerste kennismaking krijgen met groepentheorie, behoort ook tot het curriculum van de bacheloropleiding fysica met minor wiskunde. Daarnaast krijgen de studenten uit de opleidingen ingenieurswetenschappen en chemie aan de KU Leuven ook een korte introductie op groepentheorie, zij het in meer toegepaste contexten. Er geldt dus dat groepentheorie vandaag de dag dus enkel onderwezen wordt op universitair niveau, en meer bepaald in de opleidingen met een sterk wiskundige achtergrond. Men zou kunnen zeggen dat groepentheorie vandaag in het onderwijs een soort van nicheonderwerp is dat voorbehouden wordt voor de meest wiskundig georiënteerde studenten. Vanaf het schooljaar 2023-2024 zal deze positie van groepentheorie dus breder worden en meer in de richting van het grote publiek veranderen.

In de titel van dit hoofdstuk spreken we over een herintroductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs. Het is immers zo dat de invoering van de nieuwe specifieke eindterm er niet voor de eerste keer voor zorgt dat groepentheorie in het Vlaamse wiskundecurriculum belandt. Ten tijde van de Moderne Wiskunde, waarvan de denkbeelden in eind jaren 60 van de vorige eeuw werden ingevoerd in het Vlaamse wiskundeonderwijs, stond groepentheorie namelijk samen met verzamelingenleer centraal. Dit bleek geen succes te zijn. De leerlingen uit de eerste jaren van het secundair onderwijs, waarin groepentheorie geïntroduceerd werd, hadden veel moeite met de abstractiegraad die werd gehanteerd. De rigoureuze aanpak die bij de Moderne Wiskunde gehanteerd werd, werd al vrij snel afgevlakt, maar groepentheorie bleef in de eerste graad van het secundair onderwijs nog vrij lang op het curriculum staan. Pas bij de invoering van de eerste set eindtermen eind de jaren 90 verdween groepentheorie expliciet van het toneel nadat het katholieke onderwijsnet groepentheorie al enkele jaren uit haar wiskundecurriculum had geschrapt. We kunnen hierbij wel de opmerking maken dat er een groot verschil is tussen de manier waarop groepentheorie in die periode behandeld werd in de lessen en de nieuwe specifieke eindterm. De nieuwe eindterm is bedoeld om de leerlingen uit de derde graad met een sterk wiskundepakket kennis te laten maken met een abstracte en zuivere kamer van de wiskunde, terwijl groepentheorie in de tweede helft van de vorige eeuw vooral in de eerste graad aan bod kwam als formalisering van de rekenregels van getallenverzamelingen wanneer deze voor de eerste keer aan bod kwamen. De insteek waarmee groepentheorie in de toekomst aan bod zal komen verschilt dus zeer sterk met deze ten tijde van de Moderne Wiskunde en met de jaren tot dat groepentheorie van het toneel verdween.

3 Drie brede theoretische denkkaders toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie

In deze paragraaf worden drie theoretische denkkaders voorgesteld omtrent het leren en onderwijzen van abstracte algebra, en meer specifiek groepentheorie. Deze denkkaders reiken visies aan die breder toegepast kunnen worden dan enkel binnen het terrein van het leren en onderwijzen van groepentheorie. Er zal telkens eerst ingegaan worden op de algemene aspecten van deze denkkaders die breder geïnterpreteerd kunnen worden dan enkel in het licht van abstracte algebra en groepentheorie, waarna deze telkens besproken zullen worden in een context die wel specifiek naar groepentheorie verwijst. Eerst wordt de zogenaamde APOS-theorie besproken, zoals aangebracht door Dubinsky e.a. (1994) en Brown e.a. (1997). Vervolgens wordt er ingegaan op guided reinvention in het kader van het realistisch wiskundeonderwijs zoals voorgesteld door Larsen (2009) en Larsen (2013). Daarna komt ook nog het denkkader van reducing abstraction zoals voorgesteld door Hazzan (1999, 2001) aan bod. Om deze paragraaf af te sluiten wordt er stilgestaan bij de onderlinge samenhang en overeenkomsten tussen deze drie visies op het leren en onderwijzen van groepentheorie.

3.1 De APOS-theorie

De eerste theoretische visie die besproken wordt, is de APOS-theorie. De APOS-theorie is een denkkader voor het leren en onderwijzen van wiskunde in het algemeen en is dus in se niet specifiek gericht op abstracte algebra en groepentheorie. Dubinsky e.a. (1994) halen aan dat er een overeenkomst te vinden is tussen de achtergrond van de APOS-theorie en de constructivistische visie van Jean Piaget. De term APOS is een acroniem waarbij de letters respectievelijk staan voor de termen acties, processen, objecten en schema's. Deze vier mentale constructies kunnen aanzien worden als opeenvolgende denkniveaus die aanwezig zijn bij een lerende tijdens het leren van een wiskundig onderwerp. De definities en de onderlinge samenhangen tussen deze vier mentale worden nu kort voorgesteld. Vervolgens wordt er dieper ingegaan op de specifieke toepassing van de APOS-theorie in het domein van het leren en onderwijzen van groepentheorie.

3.1.1 De APOS-theorie: definities en onderlinge samenhang

In deze paragraaf wordt er dieper ingegaan op de vier mentale constructies waar de ganse APOS-theorie rond gebouwd is, namelijk acties, processen, objecten en schema's. Hierbij worden deze definities zoals aangebracht door Dubinsky e.a. (1994) en Brown e.a. (1997) geparafraseerd. Ook zullen deze concepten verduidelijkt worden aan de hand van een doorlopend voorbeeld in verband met het leren van het functiebegrip, zoals dit ook gebeurt in het artikel van Brown e.a. (1997).

- **Acties.** Acties zijn gedefinieerd als herhaalbare fysieke of mentale manipulaties waarbij een object getransformeerd wordt. Een voorbeeld van een actie als mentale constructie afkomstig uit het leren van het functiebegrip is het volgende: wanneer een leerling een functievoorschrift gegeven krijgt en van bepaalde absciswaarden de bijbehorende functiewaarden kan berekenen met behulp van het functievoorschrift zonder hierover verdere reflecties of inzichten te vertonen, redeneert hij op basis van een actie als onderliggende mentale constructie. In dit stadium staat het hands-on-karakter dus op de voorgrond, zonder enige vorm van abstractie na te streven.
- **Processen.** Processen zijn geïnterioriseerde acties. Op dit niveau heeft de lerende zich de actie eigen gemaakt en kan de lerende redeneren over het proces als de abstractie van de actie. In het kader van het functiebegrip heeft een leerling deze mentale constructie opgebouwd wanneer hij in staat is om een functie te bekijken als een soort van black box waarbij getallen worden afgebeeld op hun respectievelijke functiewaarden, zonder daarbij de ganse berekening te hoeven doen. In tegenstelling tot bij de acties, waarbij men zou kunnen zeggen dat de redenering van de leerling nog extern gestuurd werd door het functievoorschrift, speelt de redenering van de leerling zich op het procesniveau hoofdzakelijk op een innerlijke manier af. Men zegt hierbij dat de leerling de actie heeft geïnterioriseerd.

- **Objecten.** Objecten worden door Dubinsky e.a. (1994) gedefinieerd als geëncapsuleerde processen. Onder de term encapsuleren wordt verstaan dat de lerende de denkstap kan zetten om in te zien dat een proces op zich ook getransformeerd kan worden door een actie. Wanneer dit toegepast wordt op het leerproces van het functiebegrip dan merken we op dat een leerling een functie als een object bekijkt wanneer hij ingezien heeft dat een functie op zich ook getransformeerd kan worden door een actie of een proces. Voorbeelden hiervan zijn het optellen of aftrekken van verschillende functies, of het samenstellen van functies. Deze stap gaat duidelijk verder dan het zuivere procesniveau. Als een leerling het procesniveau van een functie onder de knie heeft, dan kan hij perfect de onderliggende actie van de functie uitvoeren, maar acties uitvoeren op de functie lukt dan nog niet. Om een actie of transformatie te kunnen uitvoeren op de functie moet de leerling immers het functiebegrip geëncapsuleerd hebben.
- **Schema's.** Schema's worden door Dubinsky e.a. (1994) gedefinieerd als coherente sets van processen en objecten. Hoewel in deze paper acties niet vernoemd worden in het coherente geheel uit de definitie van een schema, lijkt het aannemelijk dat deze daar ook in thuishoren. Toegespitst op het leerproces van het functiebegrip zou men kunnen zeggen dat een leerling een schema als mentale constructie heeft opgebouwd wanneer hij op een gedegen manier kan redeneren rond functies, acties kan uitvoeren op functies, kan terugkeren naar de onderliggende opgebouwde processen enzoverder.

Het is belangrijk om te vermelden dat deze vier termen niet los staan van elkaar. Zo is het perfect mogelijk dat een lerende na verloop van tijd een door hem opgebouwd schema ook zal benaderen als object. Ook halen zowel Brown e.a. (1997) als Dubinsky e.a. (1994) het concept van de-encapsuleren aan. Hiermee wordt bedoeld dat een lerende na een object geconstrueerd te hebben ook in staat kan zijn om mentaal terug te keren naar het onderliggende proces vanuit het geconstrueerde object, om dan eventueel vertrekkende van dat proces een nieuw object te gaan opbouwen.

Het uiteindelijke doel binnen de APOS-theorie is het opstellen van een zogenaamde genetische decompositie. Brown e.a. (1997) definiëren een genetische decompositie van een concept als een beschrijving van de mentale constructies waarover de lerende moet beschikken om een goed begrip te kunnen opbouwen van het desbetreffende concept. Binnen deze genetische decompositie worden dus de verschillende mentale constructies (acties, processen, objecten en schema's) opgelijst die aanwezig moeten zijn bij de lerende om het concept in kwestie op een goede manier te kunnen begrijpen. Het onderzoek van Brown e.a. (1997) gaat bijvoorbeeld na wat de genetische decompositie van het concept groep precies is.

3.1.2 De APOS-theorie toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie

Zowel Dubinsky e.a. (1994) als Brown e.a. (1997) voerden in het laatste decennium van de vorige eeuw empirische onderzoeken uit om na te gaan hoe de denkstappen van lerenden bij het leren van abstracte algebra, en groepentheorie in het bijzonder, gekaderd konden worden in het licht van de APOS-theorie. Beide onderzoeken vertrekken vanuit een klassieke ordening van de concepten in groepentheorie, waarbij de studenten aangemoedigd werden om actief bezig te zijn met de leerstof door middel van oefeningen gebaseerd op ISETL, een programmeertaal waarbij algebraïsche objecten zoals groepen met de computer gemanipuleerd kunnen worden. In het onderzoek van Brown e.a. (1997) wordt er eerst stilgestaan bij het begrip van de binaire operatie. Dit begrip wordt systematisch opgebouwd door de stappen uit het APOS-schema te volgen. Vervolgens wordt er overgegaan naar het onderwijzen van groepentheorie. Volgens Brown e.a. (1997) kan de genetische decompositie van het concept groep in het licht van de APOS-theorie het best voorgesteld worden als een schema waarin drie andere schema's omvat zitten, namelijk de schema's rond de concepten van binaire operaties, verzamelingen en axioma's. De lerende moet in staat zijn om dit schema ook als een object te bekijken, zodat hij uiteindelijk kan begrijpen dat er ook acties of transformaties op groepen uitgevoerd kunnen worden.

3.2 Guided reinvention in het kader van het realistisch wiskundeonderwijs

De tweede grote theoretische visie die besproken wordt is guided reinvention. Guided reinvention is een term die gelinkt kan worden aan de visie van het realistisch wiskundeonderwijs. Het realistisch wiskundeonderwijs, met de Nederlandse wiskundendidacticus Hans Freudenthal als belangrijkste voortrekker, is een stroming binnen de wiskundendidactiek, die aanzien kan worden als een reactie op de visie van de moderne wiskunde die eerder al ter sprake gekomen is.

Het hoofddoel van guided reinvention is om de leerlingen zelf een (wiskundig) onderwerp te laten herontdekken. Binnen het realistisch wiskundeonderwijs is men immers van mening dat dit ervoor zorgt dat dit onderwerp op deze manier beter zal blijven hangen bij de leerlingen. Het principe van guided reinvention wordt mooi verwoord en verduidelijkt door Gravemeijer (1999) in de onderstaande quote:

“The idea is to allow learners to come to regard the knowledge they acquire as their own private knowledge, knowledge for which they themselves are responsible. On the teaching side, students should be given the opportunity to build their own mathematical knowledge store on the basis of such a learning process. In relation to this, it may be noted that the RME theory is primarily a theory about knowledge construction; the idea is not to motivate students with everyday-life contexts but to look for contexts that are experientially real for the students and can be used as starting points for progressive mathematization.”

Bron: Gravemeijer (1999, pg. 158)

Binnen guided reinvention tracht men dus om de leerlingen bepaalde concepten zelf te laten herontdekken, waarbij er liefst gewerkt wordt vanuit specifieke contexten waaruit de leerlingen zelf kennis kunnen opbouwen. Binnen dit denkbeeld is het dus uit den boze dat een leerling bijvoorbeeld de definitie van een groep simpelweg voorgeschoteld krijgt. Men zal in dit geval binnen guided reinvention proberen om de leerlingen zelf de definitie te laten opstellen, vertrekkende vanuit een context die dit mogelijk maakt. Het reinvention-gedeelte uit de term guided reinvention kan men dus verbinden aan dit herontdekkingsproces als voornaamste uitgangspunt van het denkkader. Het onderdeel ‘guided’ uit de term guided reinvention kan daarnaast gekoppeld worden aan de activiteit van de leerkrachten binnen dit herontdekkingsproces. Bij guided reinvention treedt de leerkracht immers meer op als een soort van gids die de leerlingen begeleidt doorheen het herontdekkingsproces.

De rol van de leerkracht binnen guided reinvention bestaat er dus in om de leerlingen bij te staan bij en te gidsen door het herontdekkingsproces dat centraal staat. Tijdens de les kan dit bijvoorbeeld gebeuren door gerichte vragen te stellen aan de leerlingen en zo het proces in goede banen te leiden en de juiste richting in te sturen. Aan de andere kant worden er bij de visie van guided reinvention geen concrete richtlijnen meegegeven over hoe zo een herontdekkingsproces precies vormgegeven moet worden in een lessenreeks. Hoewel er geen bindende richtlijnen aanwezig zijn over hoe de instructie van een herontdekkingsproces in de praktijk in een klasgroep opgebouwd of uitgevoerd moet worden zijn er wel mogelijke hulpmiddelen of heuristieken beschreven die de leerkracht hierbij kunnen helpen. We bespreken in de komende twee alinea’s achtereenvolgend de heuristieken van de ‘emergent models’ en de lokale instructietheorie.

De eerste heuristiek die ingeroepen kan worden bij het ontwikkelen van een herontdekkingsproces in het kader van guided reinvention is de heuristiek van de ‘emergent models’, die voor het eerst beschreven werd door Gravemeijer (1999). Gravemeijer (1999) maakt hierbij de opdeling tussen het ‘model of’ en ‘model for’ die ingezet kunnen worden om de informele kennis van een leerling in een specifieke contextsituatie om te zetten naar een meer formele wiskundige kennis. Het is hierbij de bedoeling dat de leerlingen in een experimentele context activiteiten uitvoeren, waarbij het te leren concept aanzien kan worden als een model van deze uitgevoerde activiteiten. Wanneer de leerlingen de uit deze activiteiten opgedane inzichten inzetten in nieuwe situaties krijgt dit model een meer formeel en normatief karakter en is het model geëvolueerd van een ‘model of’ naar een ‘model for’. Het doel voor de leerkracht bij het vormgeven van een herontdekkingsproces in het kader van guided reinvention is dus om op zoek te gaan naar welke experimentele context bij de

leerlingen acties kan uitlokken die als een model aanzien kunnen worden van het te herontdekken concept. Dit wordt verder verduidelijkt in de onderstaande quote uit Larsen (2013):

“The idea is that the concept initially emerges as an informal and intuitive model of students’ activity in an experientially real problem situation and then the concept later evolves into a model for more formal activity. The concept is considered a model-of when an expert observer can describe the students’ activity in terms of the concept. For example an observer may notice that, when students work informally with combinations of geometric transformations, their activity anticipates aspects of the algebraic structure of this group. The concept is considered to be a model-for when students can use the concept to support their reasoning in a new situation. [...] In this way, the transition from model-of to model-for can be seen as a transition to more general mathematical activity.”

Bron: Larsen (2013, pg. 713)

Vervolgens kunnen deze zogenaamde emergent models ingezet worden om een lokale instructietheorie vorm te geven. Onder een lokale instructietheorie wordt doorgaans een stappenplan verstaan waarbij de experimentele activiteiten van de leerlingen worden vastgelegd en worden voorzien van richtlijnen. De ontwikkeling van een lokale instructietheorie is opnieuw geen vast gereguleerd proces, maar doorgaans wordt er in een eerste fase een voorstel tot lokale instructietheorie uitgetest op een kleine testgroep waarbij deze vervolgens aangepast wordt om bruikbaar te zijn binnen de setting van een normale klasgroep. De notie van een lokale instructietheorie wordt door Gravemeijer (1999) als volgt beschreven:

“The guidelines indicate both the order in which the instructional activities are to be enacted and the conjectured learning route in terms of the mental activities the students might engage in as they participate in the instructional activities. In relation to this, we speak of a local instruction theory. [...] Such a notion encompasses the consideration of the learning goal, the learning activities, and the thinking and learning in which the students might engage.”

Bron: Gravemeijer (1999, pg. 157)

3.2.1 Guided reinvention toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie

De visie van guided reinvention toegepast op het herontdekken van de definitie van een groep komt hoofdzakelijk naar voren in de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013). Deze onderzoeken kaderen in het bredere TAAFU-project, wat staat voor Teaching Abstract Algebra For Understanding, waarbij op zoek gegaan wordt naar innovatieve manieren om abstracte algebra op een onderzoeksgebaseerde en experimenterende manier aan te brengen bij een publiek van lerenden. Bij deze onderzoeken wordt het samenstellen van de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek gebruikt als specifieke context van waaruit de definitie van een groep wordt opgebouwd. De keuze voor deze specifieke context binnen de onderzoeken van Larsen gaat terug naar de visie van de grondlegger van het realistisch wiskundeonderwijs, Hans Freudenthal. Dit komt naar voren in het volgende citaat uit Larsen (2009, pg.119):

“Freudenthal (1973) argued that groups should be introduced as systems of automorphisms of structures under composition. He suggested that when groups are introduced in this way, the group axioms can be verified conceptually rather than algorithmically. For example, it is clear that if one combines two symmetries of an equilateral triangle this combination is also a symmetry of an equilateral triangle (so the set of symmetries is closed under composition).”

Bron: Larsen (2009, pg.119).

Larsen (2013) ontwikkelde een lokale instructietheorie gebaseerd op de meetkundige setting van (het samenstellen van) symmetrieën van gelijkzijdige driehoeken om de leerlingen de definitie van een groep te laten herontdekken. Zijn ontwikkelde lokale instructietheorie bestaat uiteindelijk uit de opeenvolging van de volgende stappen, waarbij we de titels van deze tussenstappen in het herontdekkingsproces van de definitie van een groep overgenomen hebben uit Larsen (2013):

- Stap 1a: Identifying and symbolizing the symmetries of a specific geometric figure.
- Stap 1b: Negotiating a shared set of symbols that includes compound moves.
- Stap 2: Combining pairs of symmetries.
- Stap 3: Developing a calculus for computing combinations of symmetries.
- Stap 4: Axiomatizing the set of rules
- Stap 5: The system of rules as a model-for reasoning about other contexts.
- Stap 6: Formulating a definition of group

In de eerste stap experimenteren de leerlingen dus met de vraag welke mogelijke symmetrieën van een specifieke meetkundige figuur, in casu een gelijkzijdige driehoek, bestaan. Hierbij wordt er klassikaal afgesproken om met dezelfde verzameling van symbolen te werken om een eenheid te scheppen in de gebruikte notaties. Indien dit niet het geval zou zijn dan zou het voor de leerkracht moeilijk worden om bij het begeleiden van de les het bos door de bomen te blijven zien aangezien het in dat geval mogelijk is dat elke leerling een ander notatiesysteem gebruikt. Vervolgens experimenteren de leerlingen met het samenstellen van symmetrieën. De samenstellingen worden op dit moment nog puur meetkundig bekeken. In een volgende stap proberen de leerlingen dan wetmatigheden te vinden in de uitgevoerde samenstellingen, waarbij ze worden aangemaand om deze samenstellingen onder de loep te nemen met de ingevoerde notaties in het achterhoofd. De leerlingen worden op die manier uitgedaagd om een soort van verzameling van rekenregels af te leiden die gelden voor de set van symmetrieën met hun bijhorende notaties. In de vierde stap gaan de leerlingen op zoek naar axioma's voor deze verzameling van rekenregels. Ze zoeken in deze stap bijvoorbeeld naar regels uit hun opgestelde lijstje die bewezen of afgeleid kunnen worden aan de hand van de andere rekenregels uit het lijstje. Op die manier wordt de lijst van rekenregels dus uitgedund, waarbij er enkel essentiële rekenregels of 'axioma's' overblijven. In een vijfde stap wordt er op een analoge manier gekeken naar een nieuwe context. De leerlingen gaan hierbij na welke regels of axioma's uit hun lijstje overeind blijven wanneer we een soortgelijke redenering opstellen binnen een nieuwe omgeving. Larsen (2013) haalt hierbij aan dat er bij deze stap bijvoorbeeld gewerkt kan worden met de samenstellingen van een andere meetkundige figuur zoals een rechthoek die geen vierkant is. Bij de laatste stap van de lokale instructietheorie wordt vervolgens de definitie van een groep opgesteld door de leerlingen.

Larsen (2009) en Larsen (2013) testten deze lokale instructietheorie vervolgens uit op verschillende testpublieken, waarbij er vooral gewerkt werd met relatief kleine groepen van studenten, vooral math majors op undergraduate-niveau. De ontwikkelde lokale instructietheorie blijkt vrij effectief te zijn om de leerlingen de definitie van een groep te laten herontdekken. Larsen (2013) zegt hierover het volgende als conclusie:

“Our research suggests that Burn (1996) and Freudenthal (1973) were right to see promise in symmetry as a fundamental concept of group theory, while Dubinsky et al. (1997) were correct in pointing out that it may be difficult for a student to abstract formal group concepts from the specific examples. The LIT presented here describes a trajectory by which students can navigate the distance between this concrete example and the general group concept.”

Bron: Larsen (2013, pg.725).

Larsen (2013) geeft dus aan dat de ontwikkelde lokale instructietheorie de leerlingen in staat stelt om de definitie van een groep op een actieve en experimenterende manier te laten herontdekken, maar hij nuanceert dit wel door aan te geven dat hij gemerkt heeft dat het voor een leerling of student niet vanzelfsprekend is om de formele groepsconcepten te abstraheren uit de specifieke voorbeelden. Er blijkt namelijk te gelden dat de testpersonen in de praktijk vaak het bestaan van inversen en associativiteit over het hoofd zien als essentiële rekenregels bij de overgang naar de definitie van een groep, zoals blijkt uit het onderstaande citaat uit Larsen (2013).

“Before discussing the importance of the strategy of rule-based calculations in the reinvention process, it is worth noting that not all of the group axioms emerge explicitly as rules and when they do, they do not necessarily emerge in the form that they appear in the definition of group. This is most significant in the case of the inverse and associativity axioms. While students typically do use inverses in their work as a way to simplify expressions, it is rare for students to include a rule stating that every symmetry has an inverse.”

Bron: Larsen (2013, pg.718-719).

3.3 Reducing abstraction

Het derde theoretische denkkader rond het leren en onderwijzen van groepentheorie dat hier besproken wordt, is het denkkader van reducing abstraction of abstractiereductie zoals voorgesteld door de Israëlische professor Hazzan (1999). De visie van abstractiereductie is gebaseerd op het inzicht dat leerlingen bij het leren van groepentheorie liever op een lager abstractieniveau redeneren over algebraïsche concepten dan het abstractieniveau waarop deze in de les zijn aangebracht. Deze abstractiereductie wordt volgens Hazzan, 1999 vaak door de leerlingen op een onderbewuste manier uitgevoerd. Orit Hazzan classificeert hierbij drie verschillende manieren waarop leerlingen aan abstractiereductie doen aan de hand van drie theoretische visies op het concept abstractieniveau. Deze drie verschillende klassen van abstractiereductie worden in de volgende alinea's systematisch besproken. Hierbij worden de door Hazzan gebruikte definities en voorbeelden geparafraseerd en meteen toegepast op het leren en onderwijzen van abstracte algebra en groepentheorie in het bijzonder.

3.3.1 Reducing abstraction toegepast op het leren en onderwijzen van groepentheorie

Ten eerste kan het abstractieniveau volgens Hazzan bekeken worden als de kwaliteit van de relaties tussen het te beredeneren object en de denkende persoon. In de praktijk komt abstractiereductie in deze visie erop neer dat lerenden liever over zaken gaan redeneren waar ze al vertrouwd mee zijn. Lerenden gaan bij het leren van groepentheorie onbewust beginnen redeneren aan de hand van concrete dingen waar ze al bekend mee zijn. Een voorbeeld hiervan is het feit dat leerlingen bij het doen van een uitspraak over een ganse groep mentaal gaan blijven hangen bij redeneringen die enkel draaien rond afzonderlijke elementen uit de groep in kwestie. Voor de lerenden voelen elementen van een groep immers meer vertrouwd aan dan het abstractere algebraïsche concept van een groep. Het liefst gaan de leerlingen bij het redeneren in termen van elementen van een groep ook nog eens terugkeren naar getallenvoorbeelden in plaats van meetkundige voorbeelden van elementen uit een groep, aangezien ze hiermee al het langst vertrouwd zijn.

Ten tweede kan het abstractieniveau en de daarbij horende abstractiereductie volgens Hazzan beschouwd worden als een weerspiegeling van de proces-objectdualiteit. Merk hierbij op dat het ganse gegeven van proces-objectdualiteit ook sterk gelinkt kan worden met de denkbeelden uit de APOS-theorie. Volgens Hazzan gaat een lerende bij groepentheorie eerst redeneren in termen van een proces. Naarmate hij meer ervaring heeft met dit onderwerp gaat de lerende vervolgens ook naar groepen kijken in termen van objecten. Een voorbeeld dat Hazzan (1999) hierbij aanhaalt draait rond het concept van de zogenaamde canonical procedures. Een canonical procedure is een procedure die in het hoofd van de lerende als het ware vastkleeft aan een bepaalde vraagstelling. Het concept van een canonical procedure kan als volgt gelinkt worden aan de proces-objectdualiteit: wanneer lerenden een probleem voorgeschoteld krijgen dat vrij snel opgelost kan worden door te redeneren op het objectniveau van de verworven leerstof, grijpen ze toch nog dikwijls terug naar een redenering op het onderliggende procesniveau, wat kan leiden tot langere en onnodige berekeningen. De canonical procedure die bij hen getriggerd wordt door de vraagstelling zorgt ervoor dat ze gaan redeneren in termen van een procedure en dus op procesniveau, terwijl een redenering op objectniveau in deze gevallen meer aangewezen is. Een praktisch voorbeeld omtrent canonical procedures in groepentheorie komt naar voren in het onderzoek van Hazzan (2001). In dit onderzoek werden studenten gevraagd om een Cayleytabel van een groep van vier elementen op te stellen. De studenten hadden hierbij al een cursus

abstracte algebra achter de rug en werden bijgevolg verondersteld te weten dat er slechts twee verschillende groepen van orde vier zijn, namelijk groepen isomorf met $\mathbb{Z}_4, +$ en groepen isomorf met $V_4, *$, de viergroep van Klein. Met dit in het achterhoofd was de opdracht helemaal niet moeilijk, ze moesten immers gewoon een Cayleytabel overeenkomstig met een van deze twee groepen opstellen. Toch grepen de leerlingen bij deze opdracht hoofdzakelijk terug naar canonical procedures die steunden op het redeneren met Cayleytabellen in het algemeen en met afzonderlijke elementen uit een Cayleytabel, zoals het feit dat een Cayleytabel van een groep een Latijns vierkant is.

De derde manier waarop Hazzan de term abstractieniveau omschrijft heeft betrekking op het abstractieniveau als de graad van complexiteit van het te overdenken concept. Hoe complexer en abstracter het te beredeneren object in elkaar zit, hoe sneller de lerende zal proberen om dit niveau van abstractie naar beneden te halen. Een voorbeeld dat Hazzan (1999) hierbij aanhaalt is het concept van de verzameling van groepen $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$ waarbij p een priemgetal is. Wanneer lerenden een uitspraak moeten doen over deze ganse verzameling aan groepen, gaan ze in hun redeneerproces automatisch overschakelen naar argumenten met de concrete groepen $\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot$ of $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot$, wat veel minder complexiteit met zich meebrengt.

3.4 Onderlinge samenhang tussen de drie visies

In deze paragraaf wordt er ingegaan op de onderlinge samenhang en de overeenkomsten tussen de drie bovenstaande visies op het leren en onderwijzen van groepentheorie. Ook al zijn de APOS-theorie, guided reinvention en reducing abstraction hierboven voorgesteld als drie afzonderlijke denkkaders, toch staan ze niet altijd even duidelijk van elkaar gescheiden en overlappen ze elkaar op sommige plaatsen. Eerst zal er verder ingegaan worden op de overeenkomsten tussen de APOS-theorie en guided reinvention en vervolgens zullen de overeenkomsten tussen het APOS-gedachtegoed en het denkkader van guided reinvention aangehaald worden.

3.4.1 Overeenkomsten tussen de APOS-theorie en guided reinvention

De grootste overeenkomsten tussen de werkwijzen van de APOS-theorie en guided reinvention worden opgelijst in de conclusie van het artikel van Weber en Larsen (2008). Enerzijds halen zij aan dat beide visies trachten om de lerenden op een actieve manier te engageren om te werken rond de belangrijke concepten rond groepentheorie. Bij de APOS-theorie is deze actieve bijdrage nodig om op een succesvolle manier de mentale verschillende mentale structuren te kunnen opbouwen. Bij guided reinvention is deze activiteit ook essentieel, want zonder enige activiteit van de leerlingen kan er niets herontdekt worden en valt de ganse doelstelling van guided reinvention in het water. Anderzijds merken Weber en Larsen ook op dat zowel de APOS-theorie als guided reinvention veel tijd besteden aan het opbouwen van een intuïtieve en experimenteel opgebouwde basis bij de leerlingen omtrent de belangrijkste concepten binnen de groepentheorie. Bij de APOS-theorie komt dit volgens hen tot uiting door het veelvuldige gebruik van de programmeertaal ISETL waarbij de leerlingen worden aangemoedigd om informele ideeën rond groepen en aanbehorende concepten te implementeren en hierdoor een intuïtie hierrond op te bouwen. Bij guided reinvention aan de andere kant gebeurt dit door de leerlingen hands-on te laten werken rond symmetrieën en zo op een experimentele manier een intuïtie te laten ontstaan over de onderliggende concepten uit de groepentheorie.

3.4.2 Overeenkomsten tussen de APOS-theorie en reducing abstraction

Ook tussen de APOS-theorie en de visie rond reducing abstraction zoals opgesteld door Orit Hazzan vallen er duidelijke overeenkomsten op te merken. Langs de ene kant valt meteen de overeenkomst op tussen het verschil in de mentale constructies objecten en processen uit de APOS-theorie en de abstractiereductie als weerspiegeling van de proces-objectdualiteit bij het framework van reducing abstraction. Ook al hebben Hazzan en de APOS-aanhangers misschien andere precieze definities van de concepten proces en object in het achterhoofd als zij hierover uitspraken doen, toch belanden zij hiermee onvermijdelijk in elkaars vaarwater. Langs de andere kant haalt Hazzan (2001) zelf de verwantschappen tussen reducing abstraction

en de educatieve visie van het constructivisme en de daarmee geassocieerde termen assimilatie en accommodatie aan. Dit doet meteen denken aan de APOS-theorie, die ook op een constructivistische leest geschoeid is.

4 Wetenschappelijk onderzoek specifiek gericht op het leren en onderwijzen van groepentheorie

Wanneer de inzichten uit de literatuur rond het zuiver praktische aspect van het leren en onderwijzen van groepentheorie naast elkaar gelegd worden, dan vallen meteen enkele zaken op. Ten eerste zijn de bronnen die rapporteren over empirische onderzoeken rond het leren en onderwijzen van groepentheorie zo goed als allemaal gebeurd bij studenten op een universitair niveau uit studierichtingen waarbij wiskunde een prominente rol speelt. Aangezien de doelgroep in deze thesis bestaat uit leerlingen op een middelbareschoolniveau, die hoewel ze het sterkst mogelijke wiskundepakket opnemen toch niet altijd even grote wiskundige ambities hebben, is dit zeker iets om in het achterhoofd te houden. Tegelijkertijd kunnen we hier ook wel enige nuance in aanbrengen. Het is namelijk zo dat het gros van de eerder aangehaalde wetenschappelijke studies een testpubliek uit de Verenigde Staten had. Wanneer we de curricula van het Vlaamse secundair onderwijs naast deze van het Amerikaanse secundair onderwijs leggen dan kunnen we stellen dat het beoogde eindniveau op het vlak van wiskunde op het einde van het secundair onderwijs bij ons hoger ligt dan in de Verenigde Staten, waar bijvoorbeeld calculus uitsluitend terug te vinden is op het universitair niveau. Ten tweede pleit zo goed als elke bron ervoor om de lerenden op een actieve manier aan het werk te zetten rond groepentheorie en hen zo de leerstof op een actieve manier te laten opbouwen. Dit moet zeker meegenomen worden in het ontwikkelingsproces. Als derde en laatste puntje valt er op dat het bij de bronnen over het leren en onderwijzen van groepentheorie vaak ontbreekt aan zeer nauw afgebakende onderzoeksvragen waarop dan een duidelijk antwoord geformuleerd wordt. Een groot deel van de bronnen is echter wel op praktisch vlak zeer nuttig omdat deze wel duidelijk rapporteren over een groot aantal van vaak terugkerende moeilijkheden en misconcepties bij het leren en onderwijzen van groepentheorie. Deze zijn zeer handig om in het achterhoofd te houden bij de praktische uitwerking van lesmateriaal rond groepentheorie.

In de volgende paragraaf worden enkele van de markantste veelvuldig terugkomende moeilijkheden en misconcepties opgelijst die in de literatuur worden voorgesteld. Daarna gaan we in op enkele creatieve ideeën om een lessenreeks groepentheorie rond vorm te geven die in de wetenschappelijke literatuur terug te vinden zijn. Vervolgens leggen we de link tussen het concept van inversen, het oplossen van vergelijkingen en groepentheorie. Tot slot gaan we in op de discussie of een meetkundige blik bij het opstellen van een introducerende lessenreeks rond groepentheorie nu obligatoir is of niet.

4.1 Vaak terugkomende moeilijkheden en misconcepties

In deze paragraaf stellen we een kleine bloemlezing voor van de meest markante misconcepties bij lerenden die in de wetenschappelijke literatuur gerapporteerd worden in verband met groepentheorie.

Ten eerste merkt Larsen (2013) op dat er met zijn werkwijze die gestoeld is op guided reinvention in een zuiver meetkundig kader blijkt te gelden dat studenten door deze aanpak uiterst moeilijk tot niet zelf tot de axioma's van associativiteit en het bestaan van inversen in de definitie van een groep komen. Deze twee axioma's zijn echter wel van levensbelang in het proces van het op een gegidste manier autonoom herontdekken van de algebraïsche definitie van een groep. Dit zorgt dus voor een existentiële moeilijkheid in de aanpak van guided reinvention voor het leren en onderwijzen van groepentheorie. Een mogelijke uitweg uit deze patstelling wordt gegeven in Leron en Eijersbo (2016). In deze paper stellen zij voor om het concept van inversen in een groepentheoretische context op een intuïtieve manier op te bouwen door met de leerlingen te vertrekken vanuit de intuïtie van tegenovergestelden in het dagelijkse leven. Op deze manier is het mogelijk om de moeilijkheid rond het bestaan van het inverse-axioma in de definitie van een groep aan te pakken. Hierover zal later nog verder uitgeweid worden wanneer het zal gaan om het opstellen van een leerlijn rond groepentheorie voor middelbare schoolleerlingen.

Ten tweede merken zowel Dubinsky e.a. (1994) als Brown e.a. (1997) op dat er een nogal hardnekkige misconceptie bij studenten bestaat wanneer het gaat om het overerven van de operatie bij de overgang van

een groep naar een deelgroep. Wanneer de studenten redeneringen opstellen over deelgroepen vergeten ze dikwijls dat de ze nog steeds de operatie afkomstig van de originele moedergroep moeten gebruiken in de deelgroep. Dit leidt tot uitspraken bij studenten zoals “ $\mathbb{Z}_3, +$ is een deelgroep van $\mathbb{Z}_6, +$ ”. Wanneer studenten deze uitspraak doen zien zij in dat elk element van $\mathbb{Z}_3, +$ ook terug te vinden is in de groep $\mathbb{Z}_6, +$. Daarnaast is $\mathbb{Z}_3, +$ op zichzelf ook een groep, dus moet deze wel een deelgroep zijn van $\mathbb{Z}_6, +$. Dit is echter niet waar omdat er bij deelgroepen steeds verder gewerkt moet worden met de oorspronkelijke operatie zoals gedefinieerd op de originele moedergroep. In dit geval zien de leerlingen dit dikwijls over het hoofd en werken ze spontaan verder met de optelling modulo drie in plaats van de juiste operatie, de optelling modulo zes afkomstig van $\mathbb{Z}_6, +$.

Een derde vaak terugkerende misconceptie die aangehaald wordt door zowel Brown e.a. (1997) als Hazzan (1999) heeft betrekking op de stelling van Lagrange. Zij merken op dat studenten vaak de stelling van Lagrange ten onrechte omgekeerd toepassen. Studenten beweren dikwijls dat een bepaalde deelverzameling van een groep wel een deelgroep moet zijn aangezien de orde van de deelverzameling die zij voor ogen hebben een deler is van de orde van de bovenliggende groep. Dit is echter helemaal niet wat de stelling van Lagrange zegt. Hazzan en Leron (1996) reiken een manier aan om deze misconceptie de wereld uit te helpen. Hun aanpak is veeleer semantisch en taalkundig van aard. Zij beargumenteren dat de verwarring bij de studenten omtrent de precieze betekenis van de stelling van Lagrange opgehelderd kan worden door de stelling op een net iets andere manier dan gebruikelijk is te formuleren, zodat er een kwantor in de formulering van de stelling verschijnt. De stelling van Lagrange belandt volgens Hazzan en Leron (1996) vaak in de volgende formulering in de algebra-handboeken: “Zij $G, *$ een eindige groep. Als $H, *$ een deelgroep is van $G, *$, dan geldt $o(H) | o(G)$.”. Merk hierbij op dat we hier de notatie $o(G)$ gebruiken om de orde van de groep $G, *$ aan te duiden. Leerlingen redeneren volgens Hazzan en Leron (1996) vaak op een wat naïeve manier in termen van het omgekeerde van deze uitspraak, namelijk: “Als $o(H) | o(G)$, dan geldt er dat $H, *$ een deelgroep is van $G, *$.”. Dit is natuurlijk niet het geval, maar toch wordt het door leerlingen vaak als waar aanschouwd. Hazzan en Leron (1996) beargumenteren dat deze omgekeerde uitspraak zelfs niet eens een correcte omkering is van de formulering van de stelling van Lagrange. Zij merken op dat een argument dat een deelverzameling H van G kiest, waarbij later verondersteld wordt dat $H, *$ een groep is, zonder zelfs maar een uitspraak te doen over het feit dat deze al of niet een deelgroep van $G, *$ is, te kort door de bocht is om een correcte omkering van de formulering van de stelling van Lagrange te zijn. Zij schuiven als alternatief de volgende omkeringsformulering naar voren: “Als $k | o(G)$, dan bestaat er een deelgroep van $G, *$ met orde k .”. Deze uitspraak is nog altijd wiskundig gezien niet waar, maar semantisch is deze al een correctere omkering van de originele stelling van Lagrange dan de eerder voorgestelde “naïeve variant”. Volgens Hazzan en Leron (1996) ligt de verwarring rond het gebruik van het omgekeerde van de stelling van Lagrange in het feit dat de leerlingen te snel voorbijgaan aan het uitsluitende karakter dat de bron van de kracht van de stelling van Lagrange vormt. Hazzan en Leron (1996) bekijken de stelling van Lagrange eerder als een zogenaamd “non-existence theorem”, dat mogelijkheden voor de ordes van deelgroepen van een gegeven groep $G, *$ uitsluit. In dat opzicht formuleren ze de kern van de stelling van Lagrange als volgt op een wiskundig correcte manier: “Als k geen deler is van $o(G)$, dan bestaat er geen deelgroep van $G, *$ met orde k .”. Merk hierbij het uitsluitende karakter van deze formulering op. Deze formulering benadrukt volgens Hazzan en Leron (1996) het vaak vergeten uitsluitende karakter van de stelling en zij merken hierbij op dat er nu een verdoken kwantor, namelijk \nexists , opduikt in de formulering. Wanneer we de contrapositie van deze laatste uitspraak nemen, verkrijgen we de alternatieve formulering voor de stelling van Lagrange waar Hazzan en Leron (1996) voor pleiten: “Als er een deelgroep van $G, *$ bestaat met orde k , dan moet $k | o(G)$.”. Hazzan en Leron (1996) geven aan dat deze formulering beter is dan de klassieke formulering omdat enerzijds het uitsluitende karakter van de stelling nu meer aanwezig is, door de aanwezigheid van de existentiële kwantor in zowel de bovenstaande vorm als in diens contrapositie. Anderzijds wordt de intuïtieve omkering van deze formulering ineens ook de eerder aangehaalde correcte omgekeerde uitspraak, waarbij er een veralgemening in termen van een algemene deler k opduikt, die evenwel wiskundig nog altijd niet waar is, maar de leerlingen minder snel foute conclusies laat trekken uit deze omkering. Ook beargumenteren Hazzan en Leron (1996) dat de stelling van Lagrange door studenten vaak wordt ingezet als een soort van slogan die uiteindelijk nog weinig

te maken heeft met de diepere uitsluitende betekenis van de stelling van Lagrange op zich.

De vierde en laatste misconceptie die hier aangehaald zal worden, is opgemerkt door Hazzan (2001). Zij zag in haar empirisch onderzoek veelvuldig gebeuren dat studenten aannamen dat in een groep enkel het neutraal element zijn eigen inverse kan zijn en andere elementen niet. Wanneer deze misconceptie klassikaal opgemerkt en behandeld wordt, kan deze makkelijk gecounterd worden aangezien er voor deze opvatting talrijke tegenvoorbeelden snel te vinden zijn. In de groep $\mathbb{Z}_2, +$ bijvoorbeeld is het element 1 zijn eigen inverse, terwijl het element 1 in deze groep niet het neutraal element is, want in deze groep is dat het element 0.

4.2 Creatieve ideeën om een lessenreeks rond groepentheorie vorm te geven

Vervolgens konden we in de wetenschappelijke literatuur op zoek gaan naar welke creatieve ideeën er reeds de revue gepasseerd zijn om een lessenreeks rond groepentheorie rond vorm te geven. We lichten hierbij drie mogelijke werkwijzen die we hebben teruggevonden zeer beknopt toe. In de volgende paragraaf gaan we dan dieper in op het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016), waarin een creatieve instap in van een introducerende lessenreeks groepentheorie wordt voorgesteld en die belangrijker is voor ons interventieonderzoek.

Een eerste creatieve manier om een lessenreeks groepentheorie vorm te geven vinden we terug bij Galarza (2017). Galarza (2017) ontwikkelde een kaartspel waarbij de studenten via spelregels die lijken op het maken van kwartetten de link moesten leggen tussen verschillende kaarten waarop groeps-elementen, inversen en Cayleytabellen afgebeeld stonden. Ten tweede ontwikkelde Maycock (2016) een softwarepakket genaamd ‘Exploring Small Groups’, waarbij de berekeningen voor het maken van Cayleytabellen geautomatiseerd werden. Dit zette zij dan in om de leerlingen op een meer conceptuele manier te laten redeneren over kleine eindige groepen en hun bijhorende Cayleytabellen, zonder dat de leerlingen veel tijd verliezen door veel tijdrovende berekeningen te moeten uitvoeren. Deze twee creatieve ideeën werden dus ingezet op een punt in de lessenreeks waar de leerlingen reeds kennisgemaakt hadden met de definitie van een groep. Dit is niet het geval bij het creatieve idee dat aangehaald wordt in het onderzoek van Cornock (2015). Cornock (2015) gebruikt de Rubik’s kubus als inleiding op het concept groep in een lessenreeks die bedoeld is voor universiteitsstudenten. Hierbij worden de verschillende mogelijke manipulaties die je kan uitvoeren op een Rubik’s kubus (denk aan het roteren van de verschillende rijen en kolommen van de kubus) de elementen van een verzameling waarbij de samenstelling van zulke manipulaties de binaire operatie vormt. Dit blijkt dan een groep te zijn en op deze manier werkt men in het onderzoek van Cornock (2015) toe naar de definitie van een groep.

4.3 Wat is het tegenovergestelde van een kat?

Een volgende creatieve instap van een introductielessenreeks rond groepentheorie werd aangebracht door Leron en Ejersbo (2016). In het artikel ‘What’s the opposite of a cat?’ geven ze een aanzet om vanuit de intuïtie rond het concept van tegenovergestelden, die bij elke leerling aanwezig is toe te werken naar de definitie van een groep. Aangezien de lessenreeks die we ontwikkelden voor het onderzoek van deze thesis nauw aanleunt bij de werkwijze zoals voorgesteld in de paper van dit Israëlisch-Deense duo zullen we deze paper hier wat gedetailleerder onder de loep nemen.

4.3.1 Doel en werkwijze van het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016)

Leron en Ejersbo (2016) geven aan dat de basis van hun paper ligt in hun interesse om (gevorderde) wiskundige concepten te benaderen en op te bouwen vanuit intuïtie of ‘gezond verstand’. Om dit in de praktijk te brengen kozen ze ervoor om dit verder expliciet te maken voor het inversebegrip zoals dit voorkomt in de definitie van een groep, waarbij ze de intuïtie rond het concept van tegenovergestelden in het alledaagse leven als natuurlijke voorloper van het inversebegrip zagen. Het hoofddoel van hun onderzoek bestond er dan ook uit om te onderzoeken hoe het inversebegrip uit groepentheorie bij lerenden aangebracht kan worden

vanuit een breed intuïtief kader rond het concept van tegenovergestelden. Dit idee werkten ze uit tot een lessequentie in vier gedeeltes, die in detail besproken zullen worden in de volgende paragraaf. Deze praktische lesuitwerking werd vervolgens in workshopvorm uitgetest met de leerlingen uit de universitaire lerarenopleidingen wiskunde van de Israëlische en Deense universiteiten waar de twee onderzoekers aan verbonden zijn. Op het vlak van onderzoeksmethodiek blijven Leron en Ejersbo eerder kwalitatief. Ze verwijzen hierbij naar hun werkwijze waarbij ze optreden als een zogenaamde ‘reflective practitioner’. Dit houdt in dat ze als onderzoekers zelf de workshops begeleiden en dus zelf actief betrokken zijn bij de uitvoering van de lessen en het onderzoek, wat hun kansen biedt om achteraf te kunnen reflecteren over het lesverloop en de reacties het testpubliek, om op die wijze achteraf hierover conclusies te kunnen trekken.

4.3.2 Concrete uitwerking lessequenties in vier delen

In deze paragraaf schetsen we de concrete inhoud van het materiaal van Leron en Ejersbo (2016). Dit valt hoofdzakelijk uiteen in vier verschillende onderdelen. In het eerste gedeelte wordt er via associaties gewerkt rond het begrip tegenovergestelde in een alledaagse context. In het tweede gedeelte worden hierin stilletjes aan wiskundige objecten geïntegreerd. Vervolgens worden in het derde gedeelte tegenovergestelden van acties uit de echte wereld onderzocht om af te sluiten met een gedeelte rond inversen van functies in een wiskundige context. Via deze opeenvolging wordt de intuïtie van de lerenden rondom het concept tegenovergestelden aangeboord om van hieruit stappen te zetten in de richting van de formele definitie van inversen zoals deze naar voren komt in de definitie van een groep. We zullen nu dieper ingaan op de concrete uitwerking van deze vier bovenstaande onderdelen.

Deel 1: associaties rond het begrip tegenovergestelde in een alledaagse context

In het eerste gedeelte van de workshops opgesteld door Leron en Ejersbo (2016) wordt er gebrainstormd rond het begrip van tegenovergestelden vertrekkende vanuit voorbeelden in de wereld rondom ons. De vragen die gesteld worden beginnen allemaal met de formulering “What’s the opposite of”, wat we in het Nederlands zullen vertalen als “Wat is het tegenovergestelde van”. De onderstaande lijst van vragen wordt gesteld aan de leerlingen, waarbij steeds het door de onderzoekers verwachte antwoord meegegeven wordt. In de praktijk is het natuurlijk niet zo dat de leerlingen altijd meteen dat verwachte antwoord geven. Op een brainstormende manier wordt er nagedacht en gediscussieerd over de vragen, waarbij de leerkracht/onderzoeker soms het gesprek in de richting van het gewilde antwoord leidt. Volgens Leron en Ejersbo (2016) helpt het ook vaak als trucje om de leerlingen te laten nadenken in termen van wat volgens hen door een groot aantal mensen het meest gestelde antwoord op de desbetreffende vraag zou zijn. Leron en Ejersbo (2016) geven hierbij aan dat de onderstaande antwoorden en ook de antwoorden op de vragen bij de volgende gedeeltes van de workshops vaak op een natuurlijke manier bij een groot deel van de proefpersonen naar voren kwamen.

- Wat is het tegenovergestelde van kat? Hond.
- Wat is het tegenovergestelde van hond? Kat.
- Wat is het tegenovergestelde van stoel? Tafel.
- Wat is het tegenovergestelde van lang? Kort.
- Wat is het tegenovergestelde van nacht? Dag.
- Wat is het tegenovergestelde van steen? Dit is een twijfelgeval: er is hier geen duidelijke tegenovergestelde aanwezig.
- Wat is het tegenovergestelde van muis? Kat.
- Wat is het tegenovergestelde van kat? Dit wordt opnieuw een twijfelgeval: daarstraks was het duidelijk dat “hond” het antwoord moest zijn, maar nu kan het even goed ook “muis” zijn.

Leron en Ejersbo (2016) merkten ten eerste op dat de proefpersonen bij de bovenstaande vragen vaak redeneerden in termen van objecten die van nature in paren voorkomen, waarbij het ene deel van het koppel automatisch als tegenovergestelde van het andere aanzien blijkt te worden, zoals dit bijvoorbeeld het geval is in het koppel stoel-tafel. Dat dit automatisch door de proefpersonen gebruikt zou worden was een veronderstelling die Leron en Ejersbo (2016) van tevoren maakten, die blijkbaar door de realiteit bevestigd wordt. Ten tweede gebruikten de proefpersonen ook automatisch de aanname dat het zijn van een tegenovergestelde symmetrisch is, namelijk dat wanneer object A het tegenovergestelde is van object B ook meteen moet gelden dat object B het tegenovergestelde is van object A. Ten derde merken Leron en Ejersbo (2016) hierbij op dat deze sequentie van vragen op een didactisch verantwoorde manier de uniciteit en het bestaan van tegenovergestelden ter sprake kan brengen, door stil te staan bij de eventueel verschillende mogelijke tegenovergestelden van het concept kat en het gebrek aan een duidelijk tegenovergestelde van het concept steen. Ten slotte halen ze hier ook wel aan dat het niet makkelijk is om vanuit deze voorbeelden meteen toe te werken naar de definitie van een groep aangezien er geen duidelijke natuurlijke operatie gedefinieerd is op de objecten of concepten wiens tegenovergestelden onderzocht zijn. Er bestaat immers geen natuurlijke weg om zich een vermenigvuldiging van een kat en een muis voor te stellen bijvoorbeeld.

Deel 2: introductie van wiskundige objecten

In het tweede gedeelte van de workshops verlaten Leron en Ejersbo (2016) de wereld van de alledaagse associaties en wordt er een overstap gemaakt naar meer wiskundige objecten en concepten. De methode van het openlijk brainstormen en associëren vertrekkende van een vraag die start met de woorden ‘Wat is het tegenovergestelde van’ wordt behouden. De leerlingen worden aangemaand om na te denken over de tegenovergestelden van getallen. Het ideale verloop van dit gedeelte van de workshop wordt hieronder schematisch weergegeven. De zinnen voorafgegaan door een hoofdletter L worden uitgesproken door de leerkracht en de zinnen voorafgegaan door een hoofdletter S worden uitgesproken door een student of lerende. Graag hadden we ook willen meegeven in hoeverre de reële klasdiscussies bij het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) overeenkwamen met deze ideale discussie, maar daar gaan ze in hun paper niet dieper op in.

- L: Wat is het tegenovergestelde van 3?
- S: -3 , of $\frac{1}{3}$ kan ook.
- L: Kan 3 twee verschillende tegenovergestelden hebben?
- S: Ja, dat zagen we ook bij kat-hond en kat-muis.
- L: Inderdaad. Wat met getallen dan?
- S (na onderlinge discussie): Het tegenovergestelde van 3 is -3 als je denkt in termen van plus en het tegenovergestelde van 3 is $\frac{1}{3}$ als je denkt in termen van maal.
- L: Goed, we bekijken het eens van een andere kant, wat is het tegenovergestelde van “ergens 3 bij optellen”?
- S: Er weer 3 van aftrekken.
- L: Kan je dat uitleggen?
- S: Als je eerst 3 optelt en dan er weer 3 van aftrekt, dan is het alsof je niets gedaan hebt.
- L: Wat bedoel je met “alsof je niets gedaan hebt”?
- S: Het is dan alsof je 0 erbij optelt, het getal blijft gelijk.
- L: Wat is dan het tegenovergestelde van “vermenigvuldigen met 3”?
- S: Delen door 3.

- L: Waarom?
- S: Als je eerst vermenigvuldigt met 3 en dan opnieuw deelt door 3 is het alsof je niets gedaan hebt. Je vermenigvuldigt dan eigenlijk met 1 waardoor het oorspronkelijke getal niet verandert.

Leron en Eijersbo (2016) merken bij dit gedeelte van de workshop op dat het probleem van de afwezigheid van een natuurlijke operatie op de objecten uit het eerste gedeelte hier niet meer van toepassing is. Het bestaan van verschillende operaties op natuurlijke getallen zoals optellen en vermenigvuldigen ligt immers aan de basis van dit tweede gedeelte. Dit tweede gedeelte leent zich er dus ook toe om de leerlingen bewust te maken op de verschillende mogelijke (binaire) operaties die uitvoerbaar zijn op (gehele) getallen. Daarnaast kan het bovenstaande geïdealiseerde vraaggesprek ook een ideale opstap zijn om het te hebben over neutrale elementen, die later in de axiomatische structuur van een groep een belangrijke rol zullen spelen. Leron en Eijersbo (2016) geven aan de andere kant wel mee dat ze hier voor de eerste keer in de workshops ervaren dat er een soort van “abstractiehorde” was die de proefpersonen moesten nemen. Studenten weten immers wel dat optellen met het getal 0 of vermenigvuldigen met het getal 1 het oorspronkelijke getal onveranderd laat, maar zij bekijken dit blijkbaar eerder als specifieke eigenschappen van de respectievelijke getallen 0 en 1 dan als specifieke eigenschappen van de operaties optelling en vermenigvuldiging. De link waarbij het concept van een neutraal element onlosmakelijk verbonden is met een specifieke (binaire) operatie is volgens hen dan ook een belangrijk aandachtspunt.

Deel 3: voorbeelden van acties uit de realiteit

In het derde gedeelte van de workshop wordt er gewerkt rond tegenovergestelden van acties, waarbij de voorbeelden van acties opnieuw geplukt worden uit de wereld om ons heen. Merk op dat er zowel een overeenkomst als een duidelijk verschil aanwezig is tussen het eerste gedeelte van de workshops en dit derde gedeelte. In beide gedeeltes wordt er immers gewerkt met voorbeelden uit het dagelijkse leven die op het eerste gezicht weinig expliciete banden hebben met wiskunde, maar in het eerste gedeelte wordt er geassocieerd rond tegenovergestelden van concepten of objecten, terwijl acties in dit derde gedeelte centraal staan. Dit leidt dan uiteindelijk tot de onderstaande ideale klasdiscussie.

- L: Wat is het tegenovergestelde van je schoenen aantrekken?
- S: Ze weer uittrekken.
- L: Wat is het tegenovergestelde van je sokken aantrekken?
- S: Je sokken weer uittrekken.
- L: Laten we nu eens kijken naar de samengestelde actie. Wat is het tegenovergestelde van “eerst je sokken aantrekken en daarna je schoenen aantrekken”?
- S: Eerst je schoenen uittrekken en daarna je sokken uittrekken.
- L: Wat is er gebeurd met de volgorde van die acties wanneer we naar het tegenovergestelde van die samengestelde acties kijken?
- S: De volgorde is omgekeerd!
- L: Inderdaad, het zijn de tegenovergestelde acties maar dan in omgekeerde volgorde. Wat is het tegenovergestelde van een muntstuk omdraaien? Neem aan dat we starten met kop vanboven en munt vanonder. Wat gebeurt er als we de munt omdraaien?
- S: Dan ligt de munt met de muntzijde vanboven en de kopzijde vanonder.
- L: Hoe krijgen we de munt dan terug in zijn oorspronkelijke positie met kop vanboven en munt vanonder.
- S: Je moet de munt dan nog eens omdraaien.

- L: Wat is dan het tegenovergestelde van de actie “een munt omdraaien”?
- S: Opnieuw de munt omdraaien, het is dezelfde actie.
- L: Inderdaad, het omdraaien van een munt is het tegenovergestelde van zichzelf.

Ten eerste geven Leron en Ejersbo (2016) na het eerste gedeelte van de workshop aan dat het moeilijk is om vanuit de objecten uit het dagelijkse leven over te gaan naar de formele definitie van een groep aangezien er geen duidelijke natuurlijke binaire operaties gedefinieerd zijn op deze objecten. In dit derde gedeelte waar er naar tegenovergestelden van alledaagse acties gekeken wordt is dit wel het geval. De samenstelling van twee acties als natuurlijke (binaire) operatie ligt hier duidelijk voor de hand. Dit vergemakkelijkt de overgang naar groepentheorie omdat er binnen de groepentheorie ook vaak gewerkt wordt met de samenstelling (van functies) als operatie waarbij de elementen geïnterpreteerd kunnen worden als een “actie”. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het samenstellen van permutaties binnen permutatiegroepen of het samenstellen van symmetrieën van een meetkundige figuur binnen symmetriegroepen. Leron en Ejersbo (2016) geven hierbij wel aan dat de overeenkomsten tussen de voorbeelden uit het dagelijkse leven zoals hierboven weergegeven en de formele behandeling binnen de genoemde groepen niet helemaal opgaat. In het echte leven is het bijvoorbeeld onmogelijk om je schoenen twee maal achter elkaar uit te trekken, terwijl in een groep de samenstelling van twee elementen opnieuw moet bestaan en een element van de groep moet zijn. Ten tweede is het duidelijk dat bovenstaand vraaggesprek ook een mooie opstap kan zijn om de regel $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ aan te brengen. Ten slotte gaan Leron en Ejersbo (2016) bij dit gedeelte van de workshop ook in op de moeilijkheid die vaak bij lerenden heerst om in te zien dat een object binnen een groep zijn eigen inverse of tegenovergestelde kan zijn. Merk op dat dit precies een van de eerder besproken vaak terugkerende misconcepties bij het leren van groepentheorie is die ook al werd aangehaald door Hazzan (2001). Deze misconceptie wordt door Leron en Ejersbo (2016) dus gecounterd door het eenvoudig voorbeeld van het omdraaien van een muntstuk onder de loep te nemen.

Deel 4: tegenovergestelden van functies, een gesofisticeerder voorbeeld

Als vierde en laatste gedeelte van de workshop wordt er overgegaan naar een uitdagender voorbeeld waarbij er gereflecteerd wordt over tegenovergestelden van functies in een wiskundige context. Hierbij wordt er verondersteld dat leerlingen al vertrouwd zijn met het samenstellen van functies en dat ze een functie kunnen beschouwen als een soort van machine die een getal als input krijgt en hier inwendig een ander getal als output aan linkt. Dit kan dan opnieuw leiden tot de onderstaande structuur van een vraaggebaseerd klasgesprek, wat deze keer enigszins verkort is geparafraseerd ten opzichte van zoals deze uitgewerkt is in de bron van Leron en Ejersbo (2016).

- L: Wat is het tegenovergestelde van $3x$?
- S: $-3x$, of $\frac{1}{3x}$ kan ook.
- L: Kan je dat uitleggen?
- S: $3x$ is een getal, dus dat is hetzelfde zoals we daarstraks met 3 gedaan hebben. Het tegenovergestelde is $-3x$ als we de optelling gebruiken met 0 als neutraal element en $\frac{1}{3x}$ als we de vermenigvuldiging gebruiken met 1 als neutraal element.
- L: We kunnen $3x$ nu ook eens gaan bekijken als een functie, namelijk $y = 3x$. Wat is daar het tegenovergestelde van?
- S: Het tegenovergestelde is dan de functie $y = \frac{x}{3}$.
- L: Kan je dat uitleggen?
- S: Het is hetzelfde als bij “vermenigvuldigen met 3” van daarstraks. Als we eerst x met 3 vermenigvuldigen en daarna dat resultaat delen door 3, dan krijgen we terug x , alsof we niets gedaan zouden hebben. Dus alles wat de functie $y = 3x$ doet wordt tenietgedaan door de functie $y = \frac{x}{3}$.

- L: We hebben nu dus al drie verschillende tegenovergestelden van $3x$ gezien, met $\frac{x}{3}$ als tegenovergestelde van $3x$ als we deze als functies bekijken, waarbij de identieke functie het neutraal element is. Wat is dan het tegenovergestelde van de functie $y = \frac{1}{x}$?
- S: Opnieuw $y = \frac{1}{x}$.
- L: Waarom is dat zo volgens jou?
- S: Omdat $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ en zo krijg je dus opnieuw de identieke functie.

Bij de bespreking van dit laatste gedeelte van de workshops geven Leron en Ejersbo (2016) aan dat deze drie verschillende voorbeelden van mogelijke tegenovergestelden van $3x$ een kans bieden om de link tussen de verschillende operaties en de daaraan vasthangende neutrale elementen te bespreken met de leerlingen. De overstap naar functies maakt het daarbij handiger om een voorbeeld van een neutraal element dat ineens zelf een ook functie is te kunnen koppelen aan de operatie van de samenstelling, die ook specifiek op functies gericht is. Dit is een mogelijkheid om te werken aan de zogenaamde “abstractiehorde” die aangehaald werd bij de bespreking van het tweede gedeelte van de workshop. Daarnaast lichten Leron en Ejersbo (2016) ook de mogelijkheid uit om de overeenstemming te benadrukken tussen het zoeken van het tegenovergestelde van de functie $y = \frac{1}{x}$ en het omdraaien van een munt als diens eigen tegenovergestelde door te redeneren in termen van het omdraaien van een breuk.

4.3.3 Conclusies van het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016)

Terugkijkend op de door hen uitgevoerde workshops concluderen Leron en Ejersbo (2016) dat de workshops aantonen dat er een mogelijkheid is om op een relatief vlotte manier de overstap te maken vanuit intuïtie, meer bepaald de intuïtie rond tegenovergestelden in het dagelijkse leven, naar meer gesofisticeerde wiskundige concepten, meer bepaald het concept van inversen zoals dit naar voren komt in de groepentheorie. Daarnaast geven ze ook wel als waarschuwing mee dat de hierboven geparafraseerde vraaggesprekken tussen leerkracht en leerlingen uiterst geïdealiseerd zijn. In de praktijk zullen deze gesprekken niet zo vlot verlopen en is er voldoende sturing nodig van de leerkracht. Ze mikken op een tijdsbestek van 1 à 2 blokken van 2 uren om de totale uitwerking van de vier lessequenties tot een goed einde te kunnen brengen in de praktijk. Ook wijzen Leron en Ejersbo (2016) in hun conclusie op het feit dat ze tijdens de workshops soms nog op moeilijkheden met abstractie stootten, waarbij het aangewezen is dat de leerkracht hier ook specifiek aandacht voor heeft bij de praktische begeleiding van de workshops. Twee eerder aangehaalde voorbeelden van zulke “abstractiehorde” die ze hierbij aanhalen zijn het feit dat een neutraal element inherent verbonden is met een operatie en het feit dat er ook niet-triviale voorbeelden zijn van objecten die het tegenovergestelde van zichzelf zijn.

4.4 Link tussen inversen, het oplossen van vergelijkingen en groepentheorie

Wanneer we terugkijken naar het tweede gedeelte van de workshops uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016), dan kunnen we opmerken dat de activiteiten die op dat moment uitgevoerd worden in de workshop vrij dicht liggen bij het oplossen van vergelijkingen. In deel 2 van de workshop staat immers de vraag “Wat is het tegenovergestelde van 3?” centraal, waarbij er vrij snel de link gelegd wordt met de eigenschappen van de getallen 0 en 1 als neutrale elementen van respectievelijk de optelling en vermenigvuldiging bij (gehele) getallen. Wanneer je immers weet dat je bij het oplossen van de vraag “Wat is het tegenovergestelde van 3?” wil toewerken naar het neutraal element toe, dan kan deze vraag voorgesteld worden met behulp van een vergelijking, namelijk in de volgende vorm: “Zoek x zo dat $3 + x = 0$ ”, of “Zoek x zo dat $3 \cdot x = 1$ ”. Verschillende bronnen pleiten ervoor om deze link tussen inversen en het oplossen van vergelijkingen uit te diepen om op basis hiervan de axioma’s uit de groepentheorie een eerste keer expliciet naar voren te laten komen. We lichten hierbij ter illustratie twee van deze onderzoeken toe.

Wasserman (2014) zocht uit hoe het oplossen van relatief eenvoudige lineaire vergelijkingen ingezet kan worden om een instap te vormen voor een lessenreeks rond abstracte algebra voor twaalf K-12-leerkrachten wiskunde in spe. In het Amerikaanse onderwijssysteem duidt men met de term K-12 alles aan wat wij in Vlaanderen kennen als het basisonderwijs en het secundair onderwijs. Tussen de respondenten zaten dus studenten die later als leerkracht (wiskunde) zouden terechtkomen op zowel basisschoolniveau als op secundair niveau. Wasserman (2014) legde de focus op het rigoureuus oplossen van de lineaire vergelijking $x + 5 = 12$ om van daaruit alle belangrijke axioma's uit de groepentheorie te expliciteren. De testpersonen konden immers meteen op het zicht zien dat het antwoord $x = 7$ moest luiden, maar werden door de onderzoeker aangemaand om alle tussenstappen die zij daarbij onbewust gezet hadden op te schrijven en alle onderliggende aannames expliciet te noteren. Dit leidde dan tot een typische oplossing zoals hieronder weergegeven staat in figuur 1, waar ook de gemaakte aannames met een link naar de axioma's uit de definitie van een groep opgelijst staan.

$$\begin{array}{ll}
 x + 5 = 12 & \\
 (x + 5) + -5 = 12 + -5 & \textit{Equivalence (additive property of)} \\
 x + (5 + -5) = 12 + -5 & \textit{Associativity (of addition on } \mathbb{R} \textit{)} \\
 x + 0 = 12 + -5 & \textit{Inverse elements (of addition on } \mathbb{R} \textit{)} \\
 x = 12 + -5 & \textit{Identity element (of addition on } \mathbb{R} \textit{)} \\
 x = 7 & \textit{Closure (of addition on } \mathbb{R} \textit{)}
 \end{array}$$

Figuur 1: Lijst van tussenstappen met bijhorende aannames en groepsaxioma's voor het rigoureuus oplossen van de vergelijking $x + 5 = 12$ zoals gebruikt in het onderzoek van Wasserman (2014). Bron: Wasserman (2014, pg.196)

Na deze oefening werd er in de lessenreeks van het onderzoek van Wasserman (2014) overgegaan naar een volledig nieuwe context, namelijk het samenstellen van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. Opnieuw werd er de testpersonen gevraagd om een vergelijking op te lossen, waarbij de elementen nu symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek waren en waarbij de gebruikte bewerking niet meer de optelling van reële getallen was maar wel het samenstellen van functies. Wasserman (2014, pg.199) geeft aan dat deze voor de testpersonen vreemde context ervoor zorgde dat ze bij elke tussenstap grondig de tijd namen om na te gaan of elke tussenstap gelijkaardig aan de tussenstappen zoals weergegeven op figuur 1 wel gerechtvaardigd waren in deze nieuwe context. Hij geeft hierbij ook aan dat de testpersonen bij het eindresultaat van het oplossen van deze vergelijking een besef ontwikkelden hoe belangrijk deze eigenschappen of axioma's wel niet zijn bij abstracte verzamelingen en bewerkingen. De testpersonen uit dit onderzoek vulden zowel voor als na de lessenreeks een test in waarbij er gepolst werd naar zowel hun kennis over de fundamentele axioma's/eigenschappen van gekende bewerkingen als hun waardeoordeel over deze axioma's/eigenschappen in het licht van hun onderwijspraktijk. Met dit laatste wordt bijvoorbeeld bedoeld of zij van mening zijn om hier in hun toekomstige lessen geen, weinig of net veel expliciete aandacht aan te schenken. Na het analyseren van deze testresultaten en het verloop van de lessenreeks merkte Wasserman (2014, pg.201) de volgende twee verschijnselen op. Ten eerste zorgde deze aanpak ervoor dat de kennis van de testpersonen over zowel de aan bod gekomen rekenkundige eigenschappen als abstracte groepen vooruit ging en ten tweede zorgde deze aanpak er ook voor dat er veranderingen kwamen in de houding van de testpersonen ten voordele van deze aanpak bij het aanleren van bijbehorende wiskunde die op het secundair niveau gegeven wordt, zoals getallenverzamelingen met bewerkingen en het oplossen van vergelijkingen. In zijn conclusie trekt Wasserman (2014, pg.209-210) het debat open of deze aanpak met het rigoureuus oplossen van vergelijkingen ook de aangewezen manier is om deze onderwerpen voor de eerste keer aan te brengen bij leerlingen. Zijn onderzoek toont inhoudelijk gezien positieve resultaten bij (toekomstige) wiskundeleerkrachten, maar hij wil dit niet meteen inzetten als een argument om dit meteen ook op deze manier bij leerlingen aan te brengen aangezien de hervormingen uit de tijd van de Moderne Wiskunde volgens hem een gereserveerde houding ten opzichte

van zulk een formele en abstracte aanpak hebben uitgelokt.

Een tweede onderzoek dat de kracht van het oplossen van vergelijkingen tracht in te zetten als opstapje naar de abstracte algebra werd uitgevoerd door Dorier (1995). Het testpubliek van deze studie bestond uit een lichte eerstejaarsstudenten aan een Franse wetenschapsuniversiteit die een eerste introducerend vak rond lineaire algebra en meer bepaald vectorruimten volgden. Dorier (1995) koos ervoor om de definitie van een vectorruimte niet simpelweg te geven aan zijn studenten. In de plaats hiervan kregen ze een werktekst mee waarin de axioma's van zowel een groep als een vectorruimte opgebouwd werden door verschillende algebraïsche acties te analyseren en hierover te reflecteren. De groepsaxioma's werden aan de man gebracht via de probleemstelling zoals afgebeeld staat in figuur 2. De studenten werden aangemaand om de volgende stelling op een rigoureuze manier te bewijzen: $xTa = b \iff x = bT(a^{-1})$. Hierbij geldt er dat a, b en x drie elementen zijn van een overkoepelende verzameling E , waarbij T een (binaire) operatie gedefinieerd op de verzameling E is. De uitwerking van dit bewijs wordt weergegeven op figuur 2. Hierbij valt er op dat de tussenstappen die gezet moeten worden om het bewijsje tot een goed einde te brengen verdacht veel lijken op de tussenstappen bij het oplossen van een lineaire vergelijking zoals gebruikt is in het hierboven besproken onderzoek van Wasserman (2014). Ook al is de opgave hier een bewijsopgave en geen expliciete instructie tot het oplossen van een vergelijking, toch kunnen deze twee goed aan elkaar gelinkt worden. Wanneer we de x uit de bewijsopgave als een onbekende beschouwen dan kunnen we de opgave als volgt woordelijk interpreteren: "Toon aan dat $x = bT(a^{-1})$ een oplossing is van de vergelijking $xTa = b$." Er wordt hier met andere woorden aan de studenten impliciet gevraagd om een lineaire vergelijking op te lossen, waarbij elke tussenstap bij het oplossen van de vergelijking een regel uit het bewijs wordt en waarbij de oplossing van de vergelijking, namelijk $x = bT(a^{-1})$, reeds gegeven is.

The artificial context used is the study of equations⁴. Indeed, when one says that for three elements a, b and x of a set E, and an operation T on E: " $xTa = b$ is equivalent to $x = bT(a^{-1})$ ", one needs to use the three axioms of the structure of group, to justify this statement:

$$\begin{aligned}
 xTa &= b \text{ iff } (xTa)Ta^{-1} = bT(a^{-1}) \\
 &\quad \text{(existence of an inverse element for each a in E)} \\
 (xTa)Ta^{-1} &= bT(a^{-1}) \text{ iff } xT(aTa^{-1}) = bT(a^{-1}) \text{ (associativity)} \\
 xT(aTa^{-1}) &= bT(a^{-1}) \text{ iff } xTe = bT(a^{-1}) \text{ (existence of a neutral element)} \\
 xTe &= bT(a^{-1}) \text{ iff } x = bT(a^{-1}) \text{ (property of e)}
 \end{aligned}$$

Figuur 2: Lijst van tussenstappen met bijhorende aannames en groepsaxioma's voor het rigoureuze bewijsen van de uitspraak $xTa = b \iff x = bT(a^{-1})$ zoals gebruikt in het onderzoek van Dorier (1995). Bron: Dorier (1995, pg.186)

In het vervolg van de studie van Dorier (1995) werden de studenten via gelijkaardige methodes op weg geholpen om de onderliggende eigenschappen van probleemsituaties te doorgronden om uiteindelijk tot een lijst van axioma's en rekenregels te komen die gelden in een context van vectorruimten. Aan de hand van debatten met medeleerlingen onderling en met de ganse lesgroep werd deze lijst van axioma's en rekenregels verder uitgedund om op die manier uiteindelijk op een formele definitie van een vectorruimtestructuur te kunnen landen. Merk op dat deze werkwijze van het uitdunnen van een reeks axioma's en rekenregels om uiteindelijk tot een formele definitie van een algebraïsche structuur sterk overeenkomt met de werkwijze uit de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013). Bij het analyseren van klassikale discussies die gehouden werden nadat de leerlingen de totale werktekst hadden afgewerkt merkte Dorier (1995) op dat de leerlingen veel betrokkener en actiever waren in vergelijking met de voorgaande jaren waarin hij het onderwerp op een eerder "klassieke" manier aanbracht. In verband met het gedeelte over het aanbrengen van de groepsaxioma's

door middel van het oplossen van vergelijkingen neemt Dorier (1995) in zijn conclusie een positieve houding aan ten opzichte van deze aanpak. We vermelden hierbij het onderstaande citaat, afkomstig uit de conclusie van Dorier (1995) over dit onderwerp:

“It must be made clear to the students that the main purpose of the sequence is not to give this mathematical result, but to focus on all the argumentation which led to it. The context of equation solving works as a paradigm to illustrate the idea of simplification and generalization included in the concept of structure. Although this paradigm did not, historically, play a dominant part in the explicitation of algebraic structures, it appears to be advantageous in teaching.”
Bron: Dorier (1995, pg.189).

4.5 Een meetkundige blik, obligatoir of niet?

In de vorige paragraaf zagen we dat er verschillende bronnen zijn die de mogelijkheid onderzocht hebben om groepentheorie en dan vooral de axioma's die voorkomen in de algebraïsche definitie van een groep bij een leerlingenpubliek aan te brengen door eerst een blik te werpen op inversen zoals bij Leron en Eijersbo (2016) of door te vertrekken vanuit het oplossen van vergelijkingen zoals bij Wasserman (2014) en Dorier (1995). Wanneer we dit in een groter kader plaatsen, zien we dat zij met een algebraïsche blik proberen om toe te werken naar de axioma's die aanwezig zijn in de definitie van een groep. Wasserman (2014) gebruikt hiervoor nog wel een meetkundig voorbeeld waarbij aan de proefpersonen gevraagd wordt om een vergelijking op te lossen waarbij de elementen in die vergelijking symmetrieën van een meetkundige figuur zijn, maar dit voorbeeld komt pas in een tweede stadium van zijn onderzoek aan bod. In deze paragraaf gaan we in op de rol die meetkunde speelt bij het aanbrengen van groepentheorie. Is een meetkundige blik obligatoir, of minstens aangewezen, wanneer we een lessenreeks willen ontwikkelen om leerlingen te laten kennismaken met groepentheorie? Om een beter beeld te krijgen op de verschillende visies die mogelijk zijn op deze vraag gaan we eerst in op de discussie tussen de Amerikaanse wiskundigen Bob Burn en Ed Dubinsky over dit onderwerp. Verder nemen we de gevoerde onderzoeken in het kader van guided reinvention onder de loep in verband met deze kwestie en we sluiten deze paragraaf af door het samenvattend onderzoek van Veith en Bitzenbauer (2022) voor te stellen.

4.5.1 APOS en de fundamente van de groepentheorie: de discussie Burn-Dubinsky

Een eerste aanleiding voor de vraag of een meetkundig karakter aangewezen is bij het aanbrengen van groepentheorie kunnen we vinden bij de discussie die gestart werd door de Amerikaanse wiskundige Burn (1996) als reactie op het onderzoek van Dubinsky e.a. (1994). Dit laatste onderzoek werd eerder al besproken in de paragraaf rond de APOS-theorie. Herinner u dat bij de APOS-theorie op zoek gegaan werd naar een zogenaamde genetische decompositie, waarbij er vastgelegd werd welke mentale constructies er bij een lerende aanwezig moesten zijn om het concept van een groep op een exhaustieve manier te kunnen begrijpen. Onder andere in het onderzoek van Brown e.a. (1997) wordt er vermeld dat er binnen het APOS-denkkader aangenomen wordt dat de genetische decompositie van het concept groep bestaat uit een schema waarin de schema's van de concepten verzameling, binaire operatie en axioma gebundeld zitten. Met deze visie in het achterhoofd valt het volgens Burn (1996) op dat Dubinsky e.a. (1994) in zijn onderzoek de noties van verzamelingen en binaire operaties sterk centraal zet bij het onderwijzen van het onderwerp groepentheorie. Burn (1996) gaat hier tegenin. Hij pleit ervoor om de starre visie om enkel deze concepten als de fundamentele bouwstenen van de groepentheorie te laten varen en om groepentheorie met een meer historische blik te benaderen, zoals duidelijk wordt in onderstaand citaat:

“Anyone who looks at some mathematics with a view to finding sets and functions there can hardly fail, and no one can deny the unification which they bring to mathematics as a whole. But a set-theoretic analysis is a twentieth-century analysis performed upon the mathematics of earlier centuries as well as on our own, and the mathematics of those earlier centuries is not to be dismissed merely on that account. This is particularly true of group theory, which originated

in the study of permutations of the roots of an equation, and which also developed from the analysis of rigid motions. Historically, the fundamental concepts of group theory were those of permutation and of symmetry.”

Bron: Burn (1996, pg.375).

Burn (1996) brengt hiermee dus de meer meetkundig georiënteerde concepten van permutaties en symmetrieën binnen in het debat over wat nu precies de fundamentele concepten van de groepentheorie zijn, en daaraan vasthangend ook hoe we de groepentheorie moeten onderwijzen. Verderop in zijn artikel haalt Burn (1996) aan dat zijn kritiek niet geïnterpreteerd moet worden als een totale verwerping van het APOS-gedachtegoed. Volgens hem kan de opeenvolging van actie-proces-object-schema even goed of zelfs beter tot zijn recht komen wanneer deze opeenvolging vertrekt vanuit meetkundige acties. Vanuit zijn eigen lespraktijk haalt Burn (1996) aan dat hij eerst zijn lessenreeks groepentheorie vormgaf op een manier gelijkaardig aan degene die gebruikt is in het onderzoek Dubinsky e.a. (1994), maar dat hij enkele jaren geleden overgeschakeld is naar een lessenreeks waarbij eerst gedurende vijftig lestijden meetkundige symmetrieën worden onderzocht, alvorens axioma's aan te brengen. Burn (1996, pg.377) haalt hierbij aan dat zijn studenten met deze nieuwe meetkundige aanpak meteen de axioma's waarden wanneer zij op het toneel verschijnen, in tegenstelling tot zijn eerdere ervaringen wanneer hij nog werkte op de manier de gelijkaardig was aan de aanpak van Dubinsky e.a. (1994). Dubinsky e.a. (1997) reageerden in een soort van wederwoord op de bovenstaande kritieken die door Burn (1996) geleverd werden op hun eerder artikel. Hierbij geven ze enerzijds aan dat historische achtergrond interessant kan zijn om mee te nemen in het ontwikkelingsproces van een leertraject, maar dat het nabootsen van een historisch uitvindingsproces daarom niet per se de beste mogelijkheid is voor het vormgeven van een leerproces. Anderzijds stellen Dubinsky e.a. (1997) zich duidelijk inschikkelijker op wanneer het gaat over het feit of permutaties en symmetrieën gerekend moeten worden tot de lijst van de fundamentele concepten van de groepentheorie. Dit komt bijvoorbeeld naar voren in het onderstaande citaat:

“We can hardly disagree; all of these concepts play major roles in our thinking about group theory, and in other papers we have indicated our awareness of the importance of functions, permutations and symmetries. We probably should have inserted the word ‘some’ in our title to make it ‘On Learning *Some* Fundamental Concepts of Group Theory’.”

Bron: Dubinsky e.a. (1997, pg.251).

Persoonlijk vind ik deze laatste reactie van Dubinsky e.a. (1997) ten aanzien van de status van permutaties en symmetrieën als fundamentele concepten van de groepentheorie wat opmerkelijk. Als aanhangers van het APOS-gedachtegoed zijn deze onderzoekers er dus niet van overtuigd dat permutaties of meetkundige symmetrieën onderdeel zijn van de genetische decompositie van de groepentheorie. Meetkunde en symmetrieën zijn volgens de APOS-theorie dus geen deel van de noodzakelijke mentale constructies die nodig zijn om groepentheorie te kunnen bedrijven. Aan de andere kant spreken Dubinsky e.a. (1997) in het bovenstaande citaat uit dat ze de mening van Burn (1996) delen dat meetkundige symmetrieën een belangrijke rol spelen bij het denken over groepentheorie en dat deze bijgevolg aanzien kunnen worden als ‘fundamentele concepten’ van groepentheorie. Het antwoord op de vraag of een meetkundige blik aangewezen of obligatoir is bij het aanbrenge van groepentheorie lijkt hiermee in het licht van het APOS-gedachtegoed bijgevolg af te stevenen op een eerder taalkundige kwestie over de verschillen en nuances tussen ‘fundamentele concepten’ en ‘genetische decomposities’.

4.5.2 Guided reinvention: meetkunde als verplichte bondgenoot?

Wanneer we vervolgens de onderzoeken onder de loep nemen die zich toespitsen op het aanbrenge van groepentheorie binnen het kader van guided reinvention en het realistisch wiskundeonderwijs, dan zien we dat we binnen dit genre niet om de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013) heen kunnen. Zoals eerder in de paragraaf rond guided reinvention aangehaald werd, ontwikkelde de Amerikaanse professor Sean Larsen in deze onderzoeken een zogenaamde lokale instructietheorie waarbij de leerlingen op een gegidste manier de definitie van een groep zelf kunnen herontdekken. De basis van deze lokale instructietheorie zoals

voorgesteld in Larsen (2013) bestaat uit het manipuleren van gelijkzijdige driehoeken, om op die manier de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek en de samenstellingen van deze symmetrieën te gaan onderzoeken. Er geldt hier dus dat de lokale instructietheorie voor het aanbrenge van groepentheorie bij lerenden, die opgesteld werd door Larsen (2013), volledig de meetkunde als uitvalsbasis neemt om toe te werken naar het concept van een groep. Verder konden we nergens andere wetenschappelijke bronnen vinden die tegelijk expliciet verwijzen naar guided reinvention en afstappen van deze zuiver meetkundige blik zoals toegepast door Larsen (2013). Dit doet de vraag rijzen waarom er binnen het denkkader van guided reinvention of in de bredere context van het realistisch wiskundeonderwijs een automatische neiging lijkt te bestaan naar de meetkunde als insteek om naar groepentheorie toe te werken. Een mogelijke aanwijzing hierover vinden we terug bij Larsen (2009), die hierbij verwijst naar de overtuigingen van Hans Freudenthal, de grondlegger van het realistisch wiskundeonderwijs, zoals voorgesteld in Freudenthal (1973). Bekijk hierbij het volgende citaat, afkomstig uit Larsen (2009, pg.119):

“Freudenthal (1973) argued that groups should be introduced as systems of automorphisms of structures under composition. He suggested that when groups are introduced in this way, the group axioms can be verified conceptually rather than algorithmically. For example, it is clear that if one combines two symmetries of an equilateral triangle this combination is also a symmetry of an equilateral triangle (so the set of symmetries is closed under composition). Similarly, Burn (1996) argued that the notions of permutation and symmetry should be regarded as the fundamental concepts of group theory.”

Bron: Larsen (2009, pg.119).

Er geldt dus dat het idee om groepentheorie binnen het licht van het realistisch onderwijs aan te brengen vanuit het concept van automorfismen, zijnde afbeeldingen van objecten naar zichzelf zoals de meetkundige symmetrieën van een driehoek, reeds teruggaat tot de denkbeelden van Freudenthal (1973). Merk hiernaast ook op dat Larsen (2009) hierbij expliciet verwijst naar het in de vorige paragraaf aangehaalde pleidooi van Burn (1996). Het lijkt er dus op dat het meetkundige perspectief al vanaf de stichter Freudenthal binnen de kringen van guided reinvention en het realistisch wiskundeonderwijs als meest aangewezen bondgenoot voor het aanbrenge van groepentheorie wordt gezien. Betekent dit dan ook automatisch dat een methode gestoeld op de werkwijze van guided reinvention hand in hand moet gaan met een meetkundig uitgangspunt? Wij zijn ervan overtuigd dat het antwoord op deze vraag nee is. In de lessenreeks die we voor dit masterproefonderzoek ontwikkeld hebben combineren we immers de werkwijze van het op een gegidste manier herontdekken van de definitie van een groep met een instap vanuit een eerder algebraïsch perspectief. De link met meetkunde zal hierbij pas gelegd worden nadat de axiomatische definitie van een groep herontdekt is door de leerlingen. Op die manier onderzoeken we hoe guided reinvention toegepast kan worden bij het onderwijzen van groepentheorie, zonder daarbij de heersende overtuiging van Larsen (2009) en Freudenthal (1973) in verband met het aangewezen meetkundige uitgangspunt over te nemen.

4.5.3 Samenvattende studie over deze kwestie: Veith en Bitzenbauer, 2022

Wanneer we terugkijken naar de bovenstaande discussies, dan zien we dat er meerdere stemmen zijn die ervoor pleiten om een meetkundige blik aan te nemen bij het ontwikkelen van een lessenreeks die als doel heeft om de belangrijkste noties rond groepentheorie aan te brengen. Aan de andere kant zijn we door middel van de onderzoeken van Dorier (1995) en Wasserman (2014) al onderzoeken tegengekomen die vertrekken van het rigoureu oplossen van vergelijkingen om van daaruit toe te werken naar de definitie van een groep. Welke uitgangspositie heeft er nu globaal gezien het meeste aanhang? Om een antwoord te vinden op deze vraag onderzochten Veith en Bitzenbauer (2022) in de literatuurstudie van hun artikel de aanwezige hedendaagse wetenschappelijke literatuur op een kwantitatieve manier. Zij lijdten hierbij de verschillende wetenschappelijke bronnen op die in hun onderzoek onderzocht hadden of pleitten voor een van deze twee visies. Om het lijstje te vervolledigen namen ze er ook nog een derde mogelijkheid bij, namelijk door te vertrekken vanuit de eigenschappen van binaire operaties en dit te gebruiken om over te gaan naar de definitie van een groep, zoals bijvoorbeeld gebeurd is in de APOS-gerelateerde studie van Brown e.a. (1997).

De door Veith en Bitzenbauer (2022) opgestelde kwantitatieve oplistijng van de wetenschappelijke bronnen die deze drie verschillende visies inzake het aanbrengen van het concept groep aanhangen staat weergegeven in figuur 3:

Key Finding	Abbreviation	References
Solving Equations, working with familiar number sets (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R})	K1	[1,5,39,40]
Symmetries, experimenting, engaging physically	K2	[1,6,24,40,42,46,47]
Properties of binary operations	K3	[1,44,45]

Figuur 3: Vergelijking van het aantal wetenschappelijke bronnen dat pleit voor het gebruiken van oplossen van vergelijkingen of symmetrieën als instap om naar de definitie van een groep toe te werken, zoals opgesteld door Veith en Bitzenbauer (2022). Bron: Veith en Bitzenbauer (2022, pg.8)

Wanneer we de tabel van naderbij bekijken, dan merken we ten eerste op dat de lijst met bronnen die een voorstander zijn van het experimenteren met symmetrieën in de meerderheid zijn. Dit kan bijvoorbeeld gekaderd worden door de eerder aangehaalde natuurlijke voorliefde voor deze meetkundige blik bij de aanhangers van guided reinvention en het realistisch wiskundeonderwijs. Ook merken we op dat er sommige nummers in de lijst van meerdere verschillende visies opduiken. Het nummer 1 uit de referentielijst van Veith en Bitzenbauer (2022) verwijst bijvoorbeeld naar de eerder in paragraaf 4.4 besproken bron van Wasserman (2014). Wanneer we terugdenken aan deze bron dan kunnen we stellen dat de hoofdgedachte van deze bron lag bij het oplossen van vergelijkingen, waarbij er terzijde ook wel gebruik gemaakt werd van een meetkundig voorbeeld. We kunnen dus begrijpen dat Veith en Bitzenbauer (2022) deze bron ook oplistten naast de meetkundige categorie, maar toch zouden we willen benadrukken dat deze bron qua originele insteek veel dichter aanleunt bij de categorie van het oplossen van vergelijkingen. Daarnaast zouden we ook nog een nuancering willen plaatsen bij de strikte onderverdeling tussen de eerste en de derde categorie van de oplistijng in figuur 3. Wanneer we terugkijken naar de werkwijze die gebruikt werd in de onderzoeken van Wasserman (2014) en Dorier (1995), dan zien we dat bij het rigoureuze oplossen van vergelijkingen de link gelegd wordt met specifieke eigenschappen van de daarbij gebruikte bewerkingen, zoals associativiteit en het bestaan van een neutraal element. De afbakening tussen de eerste en de derde categorie in de oplistijng is bij nader inzien dus vrij subtiel, waardoor er zeker overlap mogelijk is tussen deze categorieën. We merken ook op dat de oplistijng zoals voorgesteld in figuur 3 niet volledig exhaustief is. De paper van Leron en Ejersbo (2016), die centraal stond in paragraaf 4.3, duikt bijvoorbeeld niet op in de oplistijng, hoewel deze naadloos had gepast in zowel de categorie ‘working with familiar number sets’ als de categorie ‘properties of binary operations’.

4.5.4 Conclusie: een meetkundige blik, obligatoir of niet?

Terugkijkend op de vorige paragrafen in samenhang met de kwantitatieve oplistijng door Veith en Bitzenbauer (2022) zien we dat er veel stemmen zijn die ervoor pleiten om een meetkundige blik, toegespitst op het experimenteren met symmetrieën van een meetkundige figuur, aan te nemen bij het ontwikkelen van een lessenreeks waarbij er toegewerkt wordt naar de definitie van een groep. Opvallend hierbij is de natuurlijke voorliefde van de aanhangers van het realistisch wiskundeonderwijs voor deze visie, die reeds teruggaat tot Freudenthal (1973). Aan de andere kant merken we in de oplistijng door Veith en Bitzenbauer (2022) op dat er zeker alternatieve mindsets zijn om ditzelfde doel te bereiken, zoals werken met het oplossen van vergelijkingen, werken met gekende getallenverzamelingen of werken met eigenschappen van binaire bewerkingen. Deze alternatieven zijn duidelijk op een meer algebraïsche leest geschoeid in vergelijking met de zuiver meetkundige mindsets van bijvoorbeeld Freudenthal (1973) of Burn (1996). Een meetkundig

uitgangspunt hanteren bij het ontwikkelen van een lessenreeks rond groepentheorie is dus zeker niet obligatoir, hoewel dit door een groot deel van de wetenschappelijke literatuur wel gebruikt of verdedigd wordt.

5 Opzet van een interventieonderzoek rond groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs

In deze paragraaf verklaren we de opzet en de uitwerking van het interventieonderzoek dat we hebben uitgevoerd in het kader van deze masterproefthesis. Het hoofddoel van deze thesis bestaat eruit om een lessenreeks rond groepentheorie met een hoofdzakelijk algebraïsche insteek op te bouwen en uit te testen waarbij de leerlingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs met een sterk wiskundepakket als doelgroep bekeken worden. Deze lessenreeks, die we in de komende paragrafen ook kort zullen voorstellen, werd vervolgens uitgetest in drie verschillende scholen uit de ruime regio Kempen. De lessenreeks bestaat uit vijf lesblokken waarbij elk lesblok een periode van twee lesuren beslaat. Ook werd er een toets opgesteld die afgenomen werd bij de betrokken leerlingen na de lessenreeks. Zoals in tabel 1 samengevat staat werd de lessenreeks uitgetest bij in totaal 36 leerlingen uit drie verschillende scholen. In een van deze drie scholen trad ik zelf op als leerkracht en in de overige scholen werd de lessenreeks gegeven door de vaste leerkracht wiskunde van de desbetreffende school. In beide gevallen was deze leerkracht zelf een master in de wiskunde. De beide leerkrachten hadden ook om en bij de twintig jaar ervaring in het onderwijs op het moment van de uitvoering van dit onderzoek. Volgens de naamgeving die Verschaffel (2020) hanteert, gaat het hier dus over een small-scale interventieonderzoek.

De lessenreeks werd in de drie deelnemende scholen gegeven in de zogenaamde seminarie-uren wiskunde. In de scholen in kwestie kunnen de leerlingen die zes uren wiskunde per week krijgen, kiezen voor twee extra uren seminarie-uren wiskunde. In deze seminarie-uren worden meer diepgaande en uitgebreidere onderwerpen uit de wiskunde aangesneden. De specifieke eindterm rond groepentheorie zal in de toekomst ook in voege treden bij alle leerlingen uit de richtingen met zes lesuren wiskunde per week, die al die niet voor de seminarie-uren wiskunde zullen kiezen. De lessenreeks werd dus gegeven aan een deelpopulatie van de leerlingen voor wie de nieuwe eindterm zal gelden, terwijl de eindterm een breder doelpubliek zal hebben dan het testpubliek in dit onderzoek. Merk op dat de lessenreeks in de drie gevallen gegeven werd in deze zogenaamde seminarie-uren wiskunde, maar dat het in twee van de drie gevallen om een zesdejaarsklas ging terwijl het in de overige school een vijfdejaarsklas betrof.

School	Leerkracht	Aantal leerlingen	Profiel leerlingen
A	Ben Vos	9	6de jaar seminarie 6+2
B	Vaste leerkracht school B	13	6de jaar seminarie 6+2
C	Vaste leerkracht school C	14	5de jaar seminarie 6+2

Tabel 1: Overzicht van het leerlingenpubliek waarbij de lessenreeks is uitgetest.

In de komende drie paragrafen stellen we kort de lessenreeks voor en koppelen we deze aan de drie onderzoeksvragen die verbonden zijn aan dit masterproefonderzoek. Hierbij gaan we ook in op de werkwijze die we gebruiken hebben om antwoorden te kunnen formuleren op deze onderzoeksvragen.

5.1 Instap: vanuit het begrip tegenovergestelde naar de axioma's van een groep

Bij de aanvang van dit masterproefonderzoek werd er beslist om bij de uit te werken lessenreeks een algebraïsch perspectief in te nemen. Deze beslissing was eerder kunstmatig, maar deze kadert in een groter geheel waarbij Mathias Buckinx, student uit de master wiskunde aan de KU Leuven, voor zijn masterproefonderzoek een gelijkaardige opzet volgt inzake het opbouwen en uittesten van een lessenreeks rond groepentheorie voor het secundair onderwijs. Er werd in onderling overleg afgesproken dat ik me meer zou toeleveren op een algebraïsch perspectief, terwijl hij meer het meetkundige perspectief zou innemen bij het ontwikkelen van een lessenreeks.

5.1.1 Instap van de lessenreeks: bredere filosofie

Een eerste vraag die zich stelt wanneer we het algebraïsch uitgangspunt voor de lessenreeks in het achterhoofd houden is welke instap we kunnen gebruiken om de leerlingen te laten kennismaken met de definitie van een groep, die onmisbaar is wanneer we willen werken rond groepentheorie. Terugblikkend op figuur 3 uit het onderzoek van Veith en Bitzenbauer (2022) zien we dat het hedendaags literatuuronderzoek aan het licht brengt dat er grosso modo drie kampen zijn, waarbij we met onze algebraïsche blik het experimenteren met symmetrieën even buiten beschouwing laten. Verschillende wetenschappelijke bronnen pleiten ervoor om toe te werken naar de definitie van een groep door gebruik te maken van het oplossen van vergelijkingen, door te werken rond gekende getallenverzamelingen of door te werken rond eigenschappen van binaire bewerkingen. In de lessenreeks die ontwikkeld werd voor dit masterproefonderzoek werden deze drie suggesties gecombineerd. Op deze manier kan er met een algebraïsche blik toegewerkt worden naar de definitie van een groep, waarbij de aantrekkelijkste en interessantste invalshoeken samengenomen worden zodat er hopelijk het beste van deze verschillende werelden samen tot uiting kan komen in de lessenreeks.

Als breder kader werd er gewerkt met de filosofie van guided reinvention, waarbij de leerlingen de definitie van een groep zelf herontdekken, met de leerkracht als gids. In paragraaf 4.5.2 werd er besproken dat deze filosofie van guided reinvention in het bekende wetenschappelijk materiaal bijna automatisch hand in hand gaat met een meetkundige blik, zoals in de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013), maar in onze lessenreeks volgen we deze quasi automatische stap niet. Ook liggen de gebruikte werkvormen bij het begin van deze lessenreeks iets anders dan in de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013). Bij het onderzoek van Larsen werden de leerlingen immers grotendeels zelfstandig aan het werk gezet, terwijl de voortgang van de lessenreeks verbonden aan dit onderzoek meer klassikaal gestuurd werd. Onze lessenreeks is ontwikkeld met het uitgangspunt dat er een overkoepelend klassikaal tempo in de opeenvolging van de opdrachten behouden wordt, waar in de onderzoeken van Larsen er mogelijks grotere verschillen konden ontstaan tussen de leerlingen onderling.

De meest gebruikte werkvorm van onze lessenreeks is het onderwijsleergesprek. Dit wordt, zeker in dit eerste instapgedeelte van de lessenreeks, veelvuldig afgewisseld met de werkvorm think-pair-share. Bij deze werkvorm worden de leerlingen eerst aangespoord om gedurende een korte tijd zelfstandig na te denken en een antwoord te formuleren op een vraag die klassikaal gesteld werd. Vervolgens krijgen de leerlingen even de tijd om met hun buur te overleggen over deze vraag. Wat zijn hun onderlinge visies? Zijn ze het met elkaar eens of niet? Waarom zijn ze overtuigd van hun antwoord? Tot slot wordt er dan klassikaal besproken wat het meest voorkomende en/of juiste antwoord op de oorspronkelijke vraag was, waarbij verschillende leerlingen aangeduid worden om hun visie toe te lichten zodat andere leerlingen uit de klas daarop kunnen reageren om zo tot een klassikaal besluit te komen. We hebben voor het onderwijsleergesprek als uitvalsbasis gekozen omdat op deze manier het klassikale tempo goed in de hand gehouden kan worden en voor elke leerling gelijk blijft. De activerende en meer interactieve gedeeltes van de les worden daarnaast vaak in de vorm van een think-pair-share gegoten, waarbij de leerkracht in het licht van guided reinvention meer optreedt als een gids in de discussies. Think-pair-share leek ons de meest aangewezen werkvorm om brainstormsessies in goede banen te leiden. Ook leek dit ons een goede manier om de leerlingen zelf aan het redeneren te zetten bij een praktische uitwerking van de werkwijze zoals gehanteerd werd in het onderzoek van Leron en Eijersbo (2016).

5.1.2 Concrete uitwerking: vanuit het begrip tegenovergestelde naar de axioma's van een groep

Bij de concrete uitwerking van het instapgedeelte van de lessenreeks werd er een leidraad in PowerPoint uitgewerkt die als ondersteuning gebruikt kon worden tijdens de effectieve uitvoering van de lessenreeks. Een pdf-afdruk van deze PowerPoint-presentatie, samen met de andere presentaties die bij de overige lessen van deze lessenreeks horen, kan u terugvinden in bijlage 9.1 aan het einde van dit bestand. Aangezien deze instap ook de meeste voorbereiding en betrokkenheid van de leerkracht verwacht in vergelijking met de rest

van de lessenreeks die werd ontwikkeld is er ook besloten om voor deze instap een uitgebreider draaiboek uit te schrijven voor dit eerste lesblok van twee lessen. Dit uitgewerkte draaiboek kan u ook in bijlage 9.2 terugvinden aan het einde van deze tekst.

De hoofdgedachte van de instap van de lessenreeks is om met het principe van *guided reinvention* in het achterhoofd de leerlingen zelf de definitie van een groep te laten herontdekken. De weg die genomen werd om naar deze definitie toe te werken is hierbij voornamelijk gebaseerd op de werkwijze uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016), waarbij er door de leerlingen gebrainstormd wordt rond het concept van tegenovergestelden om dit daarna te kunnen inzetten als een opstapje naar de definitie van een groep. In vergelijking met het originele onderzoek van Leron en Ejersbo (2016), dat uitvoerig besproken werd in paragraaf 4.3, maken we in onze lessenreeks eigenlijk enkel gebruik van de eerste twee gedeeltes van hun workshops, namelijk het gedeelte rond de vrije associaties rond het begrip tegenovergestelde in een alledaagse context en het gedeelte waarbij wiskundige objecten voor de eerste keer ter sprake gebracht worden, met de vraag ‘Wat is het tegenovergestelde van 3?’ als belangrijkste kapstok.

We hebben om verschillende redenen gekozen om dit als eerste vertrekpunt te nemen voor onze lessenreeks rond groepentheorie. Ten eerste is deze vrij associatie rond tegenovergestelden verrassend voor de leerlingen. We verwachten hierbij dat de leerlingen door deze onalledaagse aanpak getriggerd zullen worden en dit zullen bekijken als een interessante en aangename aanpak in vergelijking met een meer klassieke aanpak. Ten tweede vonden we het een subtiele maar elegante aanpak die op een vrij toegankelijke en concrete manier toewerkt naar iets abstracts zoals de definitie van een groep. Ten derde past deze visie ook goed binnen het kader van *guided reinvention*. De werkwijzen uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) laat immers alles vanuit de leerlingen zelf komen. De leerkracht brengt de leerstof niet zelf aan maar gidst de leerlingen door de juiste vragen te stellen in de richting van de verschillende elementen uit de definitie van een groep. We kunnen hierbij opmerken dat Leron en Ejersbo (2016) in hun artikel zelf met geen woord reppen over hoezeer hun werkwijze past in het kraam van *guided reinvention*. Misschien heeft het feit dat Uri Leron ook auteur of mede-auteur is van meerdere onderzoeken rond groepentheorie in een APOS-context hier ook wel iets mee te maken.

Een belangrijke opmerking die we over het begin van de lessenreeks moeten maken is dat we in dit gedeelte van de lessenreeks consequent spreken over ‘tegenovergestelden’ in plaats van ‘tegengesteld’. Het begrip ‘tegengesteld’ heeft immers al een wiskundige betekenis, terwijl we in deze fase de blik bij de leerlingen zo ruim mogelijk willen houden. Bijgevolg spreken we in dit gedeelte van de lessenreeks enkel over ‘tegenovergestelden’. Deze praktische subtiliteit komt naar voren omdat we als nederlandstalige onderzoekers moeten werken met een engelstalige bron. In het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) wordt er overal gewerkt met het Engelse woord ‘opposite’. Door het woord ‘opposite’ te gebruiken is het meteen duidelijk dat er een bredere blik verwacht wordt dan enkele de wiskundige blik. In het Nederlands is deze duidelijke opdeling tussen een wiskundig woord en een meer algemeen woord minder aanwezig, aangezien de meest voor de hand liggende vertaling ‘tegengesteld’ voor het Engelse ‘opposite’ al een duidelijke wiskundige connotatie en betekenis heeft. In de praktijk hebben Leron en Ejersbo (2016) echter niet met het engelstalige ‘opposite’ gewerkt. Zij hebben hun workshops uitgevoerd bij verschillende testpublieken uit Israël en Denemarken. Leron en Ejersbo (2016) vermelden in hun verslag echter niet of zij in het Hebreeuws en het Deens ook te maken gehad hebben met taalkundige nuances om de blik van de testpersonen op het brede concept ‘tegenovergestelde’ in hun workshops zo ruim mogelijk te houden, zonder hen door een specifieke woordkeuze meteen in een te wiskundige richting te duwen.

In tegenstelling tot bij het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) maken we in onze lessenreeks al een eerste abstractiestap na het eerste gedeelte waarbij geassocieerd wordt rond het begrip tegenovergestelde in een alledaagse context. Nadat we de leerlingen dezelfde vragen als uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) hebben voorgeschoteld, reflecteren we hier al een keer over en expliciteren we enkele wetmatigheden die hieruit naar voren komen. Verder hechten we ook al een waardeoordeel aan deze wetmatigheden, door toe

te werken naar een zogenaamde ‘ideale wereld van de tegenovergestelden’. Een concreet voorbeeld hiervan is dat er voor het begrip steen bijvoorbeeld geen duidelijk tegenovergestelde bestaat. Als wetmatigheid kan er dan opgeschreven worden dat niet elk object een duidelijk tegenovergestelde lijkt te hebben. Stel dat we een ‘ideale wereld van de tegenovergestelden’ zouden creëren, zouden we dan liever hebben dat elk object wel een duidelijk tegenovergestelde zou hebben of niet? Bij een klassikale discussie kan er dan afgeklopt worden dat we graag zouden hebben dat elk object een éénduidig tegenovergestelde zou hebben in de zogenaamde ‘ideale wereld van de tegenovergestelden’. Deze abstractiestap maken we vroeger in vergelijking met het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) aangezien dit volgens ons de deur openzet om later expliciet over te gaan naar de definitie van een groep, wat niet gebeurt in de werkwijze van Leron en Ejersbo (2016).

In het tweede gedeelte van de instap van de lessenreeks wordt grotendeels de werkwijze uit het tweede gedeelte van de workshops uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (2016) gevolgd. De vraag ‘Wat is het tegenovergestelde van 3?’ wordt hierbij gebruikt om de focus te leggen op de verschillende mogelijke (binaire) operaties op de gekende getallenverzamelingen van de gehele en rationale getallen. Ook wordt hierbij de betekenis van het neutraal element bij deze verschillende bewerkingen van de optelling en de vermenigvuldiging expliciet gemaakt. Vervolgens wordt beargumenteerd dat we de vraag ‘Wat is het tegenovergestelde van 3?’ kunnen herschrijven als een vergelijking, namelijk ‘Zoek x zo dat $3 + x = 0$ ’ bij de optelling en ‘Zoek x zo dat $3 \cdot x = 1$ ’ bij de vermenigvuldiging.

Vanaf dit punt leunt de lessenreeks sterk aan bij de werkwijze uit het onderzoek van Wasserman (2014) waarbij het rigoureuze oplossen van vergelijkingen centraal staat. De leerlingen weten natuurlijk op het zicht wat de oplossingen van deze vergelijkingen zijn, maar ze worden hierbij uitgedaagd om te redeneren in termen van een computer die slechts twee getallen kan optellen of kan vermenigvuldigen. Welke tussenstappen moeten ze deze computer laten zetten om tot het uiteindelijke antwoord te laten komen? Met deze visie, waarbij de leerlingen dus onbewust de focus moeten leggen op de binariteit van deze bewerkingen, wordt er van de leerlingen verwacht dat zij gelijkaardige tussenstappen zullen zetten als in figuur 1 afkomstig uit het onderzoek van Wasserman (2014). Ook worden de leerlingen hierbij herinnerd aan de zogenaamde balansmethode voor het oplossen van vergelijkingen, waarbij de gedachte is dat je telkens op de beide leden van de vergelijking exact dezelfde acties moet uitvoeren om het linkerlid zo om te vormen zodat in het linkerlid enkel nog een x overblijft.

Op deze manier komen dus de latere groepsaxioma’s van associativiteit, het bestaan van inversen en de werking van het neutraal element naar voren. We vermoeden hierbij dat deze vrij natuurlijk aanvoelende weg om deze drie onderwerpen in het licht te zetten tot effect zal hebben dat de leerlingen associativiteit, het bestaan van inversen en de werking van het neutraal element zelf zullen ‘herontdekken’ als cruciale elementen binnen de definitie van een groep. Bij de door Larsen (2009) en Larsen (2013) uitgevoerde onderzoeken in het kader van guided reinvention blijkt er immers dat de leerlingen door middel van de werkwijze die in deze onderzoeken gebruikt wordt zelf het moeilijkst associativiteit en inversen aanhalen als essentiële regels. We hopen dat onze werkwijze een verbetering zal vormen op dat vlak. Hieronder halen we een uitspraak uit Larsen (2013) waarbij hij de moeilijkheden met de herontdekking van deze onderwerpen als onderdelen van de definitie van een groep beschrijft:

“Before discussing the importance of the strategy of rule-based calculations in the reinvention process, it is worth noting that not all of the group axioms emerge explicitly as rules and when they do, they do not necessarily emerge in the form that they appear in the definition of group. This is most significant in the case of the inverse and associativity axioms. While students typically do use inverses in their work as a way to simplify expressions, it is rare for students to include a rule stating that every symmetry has an inverse.”

Bron: Larsen (2013, pg.718-719).

In het laatste gedeelte van de instap wordt er aan de leerlingen gevraagd wat volgens hen de belangrijkste concepten en eigenschappen zijn die in het voorgaande gedeelte van het eerste lesblok van de lessenreeks al

aan bod zijn gekomen. Op welke manier kunnen we de inzichten die we opgedaan hebben bij het tweede gedeelte rond de tegenovergestelden van getallen implementeren in de eerder bekeken ‘ideale wereld van de tegenovergestelden’? Door middel van een uitgebreidere versie van een think-pair-share worden alle ideeën van de leerlingen samengelegd, waarbij we uiteindelijk hopen of verwachten dat de belangrijkste elementen uit het klassikale gesprek samengebracht kunnen worden tot de definitie van een groep. Het feit dat je werkt binnen een overkoepelende verzameling en de geslotenheid van de binaire bewerking komt hierbij normaliter voort uit het de inzichten opgedaan in het eerste gedeelte van de les en het belang van de verschillende binaire bewerkingen, het neutraal element en het bestaan van inversen komt normaal gezien voort uit de inzichten opgedaan in het tweede gedeelte van de les. In dit gedeelte zal het voor de leerkracht cruciaal zijn om de rol van gids op te nemen: probeer de discussie de goede richting uit te sturen, zonder zelf te veel prijs te geven. De bedoeling is immers dat de leerkracht het onderwijsleergesprek in de richting van de definitie van een groep gidst, waarbij de leerlingen zelf zo veel mogelijk en liefst alle elementen uit de definitie van een groep zullen opnoemen in het gesprek.

5.1.3 Onderzoeksvraag 1 en methodologie

Op de hierboven beschreven manier combineren we in het instapgedeelte van de lessenreeks dus de filosofie van guided reinvention, tezamen met de inzichten uit de onderzoeken van Leron en Ejersbo (2016) en Wasserman (2014), om het werken met het begrip van tegenovergestelden en het oplossen van vergelijkingen met een algebraïsche insteek toe te werken naar een herontdekking van de definitie van een groep. Hieraan koppelen we de eerste onderzoeksvraag van dit masterproefonderzoek, die in onderstaande kader wordt weergegeven:

Onderzoeksvraag 1

Is de aanpak vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen effectief om de leerlingen zelf tot alle axioma's in de definitie van een groep te laten komen?

Met deze eerste onderzoeksvraag willen we dus nagaan of de voor deze lessenreeks uitgewerkte instap ook effectief werkt om met het gedachtegoed van guided reinvention in het achterhoofd de leerlingen zelf de definitie van een groep te laten herontdekken, waarbij met een algebraïsch uitgangspunt gewerkt wordt rond een abstrahering van het begrip tegenovergestelde in een alledaagse context in samenwerking met het rigoreus oplossen van (lineaire) vergelijkingen.

Om een antwoord te kunnen formuleren op deze eerste onderzoeksvraag worden verschillende methodologische instrumenten ingezet. De lijst met gebruikte methodologische instrumenten maakt meteen duidelijk dat we het onderzoek op een meer kwalitatieve dan kwantitatieve manier hebben uitgevoerd. Deze keuze hebben we gemaakt om verschillende redenen. Door de kwalitatieve focus te behouden kunnen we bijvoorbeeld meer inspelen op het klasgebeuren tijdens de lessenreeks en op de individuele denkprocessen en visies van leerlingen en leerkrachten tijdens de lessenreeks. Dit zou volgens ons moeilijker te meten zijn op een zuiver kwantitatieve manier. Daarnaast merken we ook op dat de eerder kleine schaal waarop het onderzoek uitgevoerd is ervoor zou zorgen dat een kwantitatief onderzoek minder relevant zou zijn, terwijl deze kleine schaal een minder grote rol speelt wanneer we het onderzoek op een zuiver kwalitatieve manier bekijken. Samengevat zouden we kunnen zeggen dat deze kwalitatieve blik goed past bij het verkennende karakter van ons onderzoek, waarbij de kwalitatieve methodologische instrumenten ons in staat stellen om meer diepgang te bereiken, ongeacht de vrij kleine grootte van ons testpubliek. We lijsten de gebruikte methodologische instrumenten op:

- Een logboek voor de deelnemende leerkrachten met specifieke vragen over het verloop van de les dat ze zo snel mogelijk na de les invullen.

- Semigestructureerde interviews met de deelnemende leerkrachten afzonderlijk nadat de lessenreeks gegeven is.
- Field notes die ik maakte tijdens en vlak na de lessen van de lessenreeks die ik zelf gaf.
- Afzonderlijke semigestructureerde interviews met telkens twee verschillende leerlingen uit elk van de verschillende deelnemende scholen.
- De afsluitende toets die de leerlingen oplosten na de lessenreeks.

Er werd gekozen om tijdens de lessenreeks bij de twee leerkrachten die de lessenreeks in hun klas uittesten te werken met logboeken. De volledige gebruikte lijst met vragen voor het logboek kan u terugvinden in bijlage 9.3. De logboeken lieten toe om op een vrij snelle manier een beeld te vormen bij hoe de lessenreeks verloopt. Daarnaast zijn logboeken handig om op een directe wijze antwoord te krijgen op zowel zeer specifieke vragen als meer brede vragen waarbij we een breder beeld kunnen vormen van hoe de les eraan toegegaan is. Een voorbeeld van een meer specifieke vraag uit het logboek na de eerste les is ‘Welke axioma’s werden spontaan door de leerlingen aangehaald bij de overgang naar de definitie van een groep en bij welke axioma’s was er meer sturing nodig?’. Een voorbeeld van een bredere vraag die meermaals terugkeert in het logboek is ‘Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?’.

De antwoorden die de leerkrachten formuleerden op deze richtvragen werden opnieuw aangehaald tijdens het afsluitende interview met de leerkrachten. Tijdens de interviews werd aan hen gevraagd om deze nog verder toe te lichten. De logboeken en de specifieke antwoorden van de leerkrachten werden dus ingezet als voornaamste voorbereidingsmiddel bij de interviews. De volledige interviewleidraad die gebruikt werd als basis voor de interviews met de leerkrachten kan u terugvinden in bijlage 9.4. De deelnemende leerkrachten kregen tijdens dit interview tevens de mogelijkheid om zelf dieper in te gaan op bepaalde aspecten en om zelf nog nieuwe onderwerpen aan te snijden. We kunnen in het licht van de methodologische module rond interviews (De Cock, 2020) dus spreken van semigestructureerde interviews. Toegepast op dit eerste gedeelte van de lessenreeks kregen de leerkrachten de mogelijkheid om deze instap als een breder geheel te bespreken en ook hun persoonlijke ervaringen met deze instap en hun mening hierover verder te delen. De interviews met de leerkrachten gebeurden online via Microsoft Teams. Hierbij nam ik als onderzoeker nota’s die de kerngedachten van antwoorden van de leerkrachten bevatten. Ook werden de interviews opgenomen zodat de exacte bewoordingen van de leerkrachten achteraf opnieuw weergegeven konden worden. Bij één van de twee interviews met de leerkrachten traden hierbij echter technische problemen op. De inhoud van de antwoorden van die leerkracht tijdens is dus wel bewaard gebleven in de vorm van de nota’s die tijdens het interview zelf gemaakt zijn en die vlak na het interview zijn aangevuld. Vandaar zal u ook in het hoofdstuk rond de resultaten van dit onderzoek kunnen merken dat de reacties van deze leerkracht tijdens het interview enkel geparafraseerd kunnen worden. Deze technische problemen traden niet op bij het interview met de andere leerkracht, noch bij de leerlingeninterviews. Van al deze interviews zijn de exacte bewoordingen van de geïnterviewde personen dus wel bewaard gebleven.

Ikzelf maakte field notes tijdens de les en vlak na de lessen van de lessenreeks die ik zelf in een van de drie deelnemende scholen gaf. Deze field notes gingen hoofdzakelijk over de onderwerpen die bij de andere leerkrachten expliciet bevraagd werden in hun logboek. Soms noteerde ik ook opvallende antwoorden of redeneringen van leerlingen die interessant konden zijn voor het onderzoek, zonder dat daar specifiek een vraag uit het logboek aan gekoppeld kon worden. Ik trachtte hierbij om een goed evenwicht te vinden tussen de vrij beperkte tijd die ik tijdens de lessen zelf had en het goed weergeven van de context van de opvallende gebeurtenissen en de exacte bewoordingen van de leerlingen. Toegespitst op dit eerste gedeelte van de lessenreeks maakte ik bijvoorbeeld field notes vlak na de eerste les waarbij ik noteerde welke onderdelen van de definitie van een groep vlot vernoemd werden door de leerlingen en bij welke onderdelen het wat langer duurde vooraleer ze vernoemd werden.

Enkele weken nadat de lessenreeksen volledig behandeld waren in de deelnemende scholen had ik afzonderlijke interviews met twee verschillende leerlingen uit elke deelnemende school. Hierbij werden telkens twee leerlingen uitgenodigd waarbij een leerling duidelijk een sterke was tijdens de lessenreeks en in wiskunde tout court en waarbij de andere leerling meer moeite had met de lessenreeks en/of minder geïnteresseerd was in wiskunde. Tijdens deze semigestructureerde interviews kregen de leerlingen de mogelijkheid om op een vrije manier hun visie op het begin van de lessenreeks te geven. Daarnaast werden er meer specifieke vragen over de instap van de lessenreeks gesteld. Een voorbeeld hiervan is de eerste vraag van de leerlingeninterviews die ik telkens aan de leerlingen stelde, namelijk of ze nog konden zeggen wat de definitie van een groep ook al weer inhield aangezien de lessenreeks op het moment van het interview al enige tijd achter de rug lag. We merken hierbij op dat de leerlingeninterviews achteraf gezien in vergelijking met de leerkrachteninterviews meer aan de gestructureerde kant van het semigestructureerde spectrum uit de methodologische module van De Cock (2020) lagen in vergelijking met de interviews met de leerkrachten. De leerlingen haalden van zichzelf minder spontane nieuwe zaken aan, wat ook te verwachten was. De volledige gebruikte interviewleidraad voor de interviews met de leerlingen kan u terugvinden in bijlage 9.5. Deze interviews gebeurden net zoals de interviews met de leerkrachten online via Microsoft Teams. Ik nam als onderzoeker tijdens het interview nota's die de kerngedachten van antwoorden van de leerlingen bevatten en waarbij ik aanduidde welke passages van hun antwoorden interessant waren voor het onderzoek. Ook werden de volledige interviews opgenomen zodat de exacte bewoordingen van de geïnterviewde leerlingen achteraf opnieuw weergegeven konden worden.

Het enige meer kwantitatief georiënteerde methodologische instrument dat we gebruikt hebben is de toets die we hebben opgesteld en die de leerlingen oplosten nadat de lessenreeks gegeven werd. We hebben geprobeerd om een zo valide en betrouwbaar mogelijke toets op te stellen die nauw bij de uitgewerkte lessenreeks aanleunt, zoals beschreven wordt in de methodologische module van Van Dooren (2020). Een voorbeeld van een vraag van de toets die ter ondersteuning ingezet kan worden om een antwoord te formuleren op onderzoeksvraag 1 is toetsvraag 1b. Bij deze toetsvraag moeten de leerlingen nagaan of een gegeven verzameling met een bijhorende binaire bewerking een groep is door systematisch alle axioma's uit de definitie af te lopen. Uit de antwoorden op deze vraag kunnen we dus een bijkomende indicatie afleiden over hoe goed de leerlingen de definitie van een groep hebben onthouden vlak na de afsluiting van de lessenreeks. Een volledige weergave van de toets met de bijhorende verbeterleutel is terug te vinden in bijlage 9.6.

5.2 Groepentheorie vanuit een hoofdzakelijk algebraïsch perspectief: vervolg van de lessenreeks

In deze tweede paragraaf gaan we in op het vervolg van de lessenreeks nadat de instap in de richting van de definitie van een groep gezet is. Ook in dit vervolg van de lessenreeks hebben we geprobeerd om een zo algebraïsch mogelijke blik te behouden. We stellen hieronder de inhoud van de verschillende volgende lesblokken van de lessenreeks aan u voor. In totaal bestaat de lessenreeks uit vijf opeenvolgende lesblokken van telkens twee lesuren. De PowerPoint-presentaties met de concrete uitwerking van de lessen kan u als pdf-afdruk terugvinden in bijlage 9.1 aan het einde van de tekst.

Nadat de definitie van een groep opgesteld is worden in het eerste lesblok van twee lesuren nog enkele eenvoudige voorbeelden van groepen onderzocht, waarbij vooral gefocust wordt op de vraag welke verschillende gekende getallenverzamelingen met welke binaire bewerkingen groepen vormen. Verder wordt op het einde van het eerste lesblok nog kort ingegaan op het bewijs van de uniciteit van het neutraal element in een groep en het bewijs van de uniciteit van de inverse van een gegeven element in een groep.

In het tweede lesblok van twee lesuren worden Cayleytabellen geïntroduceerd en wordt er via een vraagstuk uit de Vlaamse Wiskunde Olympiade toegewerkt naar modulorekenen, zonder hierbij een formele notie van restklassen te formuleren. Door de Cayleytabel op te stellen van de optelling modulo 7 en de optelling modulo 4 wordt er toegewerkt naar de algemene definitie van groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$. Daarna worden eindige multiplicatieve groepen onderzocht, waarbij de conclusie luidt dat $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$ enkel een groep is wan-

neer p een priemgetal is. Ook wordt op het einde van deze les uitgezocht hoe we de kandidaat-groep \mathbb{Z}_{12}, \cdot kunnen uitzuiveren door verschillende elementen ‘weg te gooien’ zodat er uiteindelijk wel voldaan is aan de definitie van een groep.

In het derde lesblok wordt er gewerkt rond de vraag ‘Wanneer zijn twee groepen hetzelfde?’. Het begrip isomorfisme staat in dit lesblok dus centraal. Eerst wordt er gewerkt rond enkele eindige groepen van matrices, waarbij er een aparte notatie voor de specifieke vormen van matrices die gebruikt worden in de voorbeelden wordt ingevoerd. Vervolgens onderzoeken de leerlingen de vermenigvuldigingen van deze matrices, waarbij er Cayleytabellen worden opgesteld van twee kandidaat-groepen van matrices en een kandidaat-groep van complexe getallen. De leerlingen gaan hierbij met behulp van de definitie van een groep na of deze kandidaat-groepen voldoen aan de definitie van een groep. Vervolgens wordt er onderzocht welke overeenkomsten er te vinden zijn tussen de structuren van de drie opgestelde Cayleytabellen. Dat gebeurt door gelijke elementen in de Cayleytabellen in eenzelfde kleur aan te duiden. Op die manier wordt er overgegaan naar de definitie van isomorfismen en isomorfe groepen. Als afsluiter wordt het isomorfisme tussen de algemene complexe getallen $a + bi$ zonder 0 met de vermenigvuldiging en de matrices van de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ zonder de nulmatrix met de matrixvermenigvuldiging onderzocht. Hierbij komt er als verrassend resultaat naar voren komt dat de complexe getallen met de vermenigvuldiging zich blijkbaar inwendig volledig hetzelfde gedragen als een groep van matrices met de matrixvermenigvuldiging.

In het vierde lesblok staan symmetriegroepen centraal, waarbij de groep D_4, \circ met diens alternatieve voorstelling als eindige groep van matrices onder de loep genomen wordt. We maken in dit vierde lesblok dus een uitstapje naar een meer meetkundig voorbeeld, maar we gaan hierbij niet heel formeel in op de meetkunde zelf. We kiezen er onder meer voor om deze stap in de richting van de meetkunde te zetten omdat de nieuwe specifieke eindterm die we besproken hebben in hoofdstuk 2 ook expliciet deze meetkundige groepen vermeldt. We hebben ervoor gekozen om deze symmetriegroepen aan kort aan bod te laten komen, maar we trachten hierbij deze symmetriegroepen door middel van isomorfismen te exploiteren op een meer algebraïsche manier. In de praktijk worden de leerlingen aan het begin van het vierde lesblok uitgedaagd om de Cayleytabel van een kandidaat-groep van acht matrices op te stellen en na te gaan dat dit een groep is. Dit blijkt een groep te zijn. Daarna wordt er via een filmpje overgegaan naar een korte bespreking van de symmetrieën van een vierkant en de samenstellingen van deze symmetrieën. Om niet te diep te moeten ingaan op de meetkundige kant van dit voorbeeld wordt er vrij snel nadat de leerlingen de basis onder de knie hebben overgegaan naar een onderzoek over de gelijkenissen tussen de Cayleytabel van de symmetriegroep D_4, \circ en de Cayleytabel van de eerder opgestelde eindige groep van matrices. Deze twee groepen blijken isomorf te zijn. Gedurende de resterende tijd van het lesblok wordt door middel van de invoering van coördinaten afgeleid hoe we de overeenkomsten kunnen zien en de spreekwoordelijke brug kunnen slaan tussen de algebraïsch getinte matrices uit de ene groep en de meetkundig getinte symmetrieën uit de andere groep, D_4, \circ .

In het vijfde en laatste lesblok ten slotte staan permutaties en deelgroepen centraal. Eerst wordt er gewerkt rond de definitie van permutaties en de samenstellingen van permutaties. Net zoals bij de symmetrieën uit het vierde lesblok en het modulorekenen uit het tweede lesblok wordt hier niet op een heel formele wijze op ingegaan. Er wordt gestreefd naar een niveau waarbij de leerlingen een notie hebben van het onderwerp die hen in staat stelt om op een adequate manier over permutaties te kunnen redeneren in een context van permutatiegroepen. We bekijken de inhoud over permutaties op zich dus niet als een doel op zich, maar we bekijken het als een gedeelte van de les dat volledig ten dienste staat van het gebruik van permutaties in een groepentheoretische context. Verder wordt er nagegaan of de verzameling van permutaties van drie elementen met de samenstelling een groep vormt en wordt er ingegaan op de algemene definitie van permutatiegroepen van de vorm S_n, \circ . Hierbij wordt de meetkundig georiënteerde groep D_4, \circ op een tweede manier algebraïsch hertaald, deze keer als een permutatiegroep waarbij een symmetrie van het vierkant bekeken wordt in het licht van een permutatie van de hoekpunten van het vierkant. Deze specifieke permutatiegroep

wordt vervolgens gebruikt om de definitie van een deelgroep aan te halen. In het tweede deel van dit laatste lesblok worden de leerlingen vervolgens uitgedaagd om op zoek te gaan naar alle deelgroepen van de groep D_4, \circ of diens gelijkwaardige vorm als eindige groep van matrices. Op het einde van deze laatste les worden om af te sluiten nog enkele afrondende beschouwingen gemaakt over waarom het interessant is om groepen en groeppentheorie te bestuderen.

5.2.1 Onderzoeksvraag 2

Herinner u dat de directe aanleiding tot dit masterproefonderzoek eruit bestond dat er een nieuwe specifieke eindterm rond groeppentheorie geïntroduceerd werd voor de leerlingen uit de derde graad die het sterkste wiskundige pakket opnemen. Een van de doelen van dit onderzoek was dan ook om een lessenreeks te ontwikkelen die sowieso alle nodige doelen uit de specifieke eindterm afdekt. De precieze formulering van de specifieke eindterm in kwestie kan u terugvinden in paragraaf 2. Wanneer we terugkijken naar de bovenstaande beschrijving van de inhouden die gedurende deze lessenreeks naar voren komen dan zien we dat er naast de definitie van een groep nog verschillende onderwerpen worden uitgespit, zoals modulorekenen, Cayleytabellen, isomorfismen, symmetriegroepen, permutatiegroepen en deelgroepen. Sommige van deze onderwerpen komen rechtstreeks overeen met de minimumdoelen die de leerlingen dienen te behalen zoals geformuleerd staan in de specifieke eindterm. Merk echter op dat sommige onderwerpen zoals isomorfismen, permutatiegroepen en deelgroepen wel aan bod komen in de lessenreeks, maar verder gaan dan de specifieke eindterm vraagt. Daarnaast vraagt de specifieke eindterm om een groepsstructuur te onderzoeken zoals gehele getallen modulo n , symmetriegroepen of een getallenverzameling. Het specifieke gebruik van het woord ‘zoals’ in deze formulering van de eindterm houdt in dat er in principe reeds voldaan is aan deze eindterm als één van deze voorbeelden onderzocht wordt. In de opgestelde lessenreeks komen deze drie voorbeelden van soorten groepen alledrie uitvoerig aan bod, en dus ook op dat vlak gaat de lessenreeks veel verder dan er minimaal verwacht wordt in de eindterm.

Bij het opstellen van de lessenreeks hebben we getracht om steeds een zo algebraïsch mogelijke blik aan te houden. Er wordt tijdens het vierde lesblok wel een uitstap gemaakt in de richting van meer meetkundig geïnspireerde symmetriegroepen, maar dit gedeelte is bewust kort gehouden, waarbij er op zoek gegaan wordt naar algebraïsche herinterpretaties van deze meetkundige symmetrieën. Ook hebben we zoals eerder aangehaald ervoor gekozen om niet al te formeel in te gaan op modulorekenen, of permutaties en symmetrieën op zich. Bij modulorekenen hadden we bijvoorbeeld nog een meer formele notie van restklassen kunnen invoeren en hadden we bijvoorbeeld de onafhankelijkheid van de representanten kunnen onderzoeken, maar dat hebben we moedwillig links laten liggen. Deze onderwerpen zijn dus puur geïnterpreteerd en aangebracht in onze lessenreeks in dienst van de groeppentheoretische contexten die we eraan konden koppelen.

De doelen van de lessenreeks naar de leerlingen toe kunnen we dus grotendeels opdelen in twee delen. Aan de ene kant willen we met deze lessenreeks de leerlingen laten voldoen aan de nieuwe specifieke eindterm, die voorgesteld werd in paragraaf 2. Aan de andere kant willen we ook meer uitgebreide doelen bereiken met de leerlingen van deze lessenreeks. We noemen deze doelen nu in grote lijnen op. Eerst willen we de leerlingen inzicht laten verwerven in de definitie van een groep. Vervolgens willen we via modulorekenen de leerlingen de werking van groepen met een eindig aantal elementen laten inzien. Hierbij worden de leerlingen getraind om op een correcte en inzichtelijke manier te werken met Cayleytabellen. Vervolgens willen we de leerlingen via de notie van isomorfismen meegeven dat verschillende objecten uit de wiskunde die op het eerste gezicht niet veel met elkaar te maken hebben inwendig volledig dezelfde structuur kunnen hebben. Het hoofddoel hierbij is dat de leerlingen zelf door Cayleytabellen te gebruiken kunnen onderzoeken of twee verschillende groepen isomorf zijn of niet. Vervolgens willen we de leerlingen laten kennismaken met groepen die meer meetkundig van aard zijn. Dit wordt gebruikt om het onderzoek naar isomorfismen te oefenen. Eenzelfde bedoeling hebben we met het gedeelte rond permutatiegroepen. Tot slot willen we met de leerlingen bereiken dat ze deelgroepen kunnen herkennen, zoeken en vinden wanneer hen een bepaalde groep wordt voorgeschoteld. Met deze insteek in het achterhoofd kunnen we vervolgens de onderstaande tweede onderzoeksvraag hieraan koppelen:

Onderzoeksvraag 2

Slaagt deze lessenreeks rond groepentheorie met hoofdzakelijk algebraïsche voorbeelden erin om de leerlingen de beoogde leerdoelen te laten behalen en hen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?

Met deze tweede onderzoeksvraag willen we dus nagaan of deze lessenreeks erin slaagt om de leerlingen een degelijk inleidend niveau mee te geven op het vlak van groepentheorie, wetende dat deze lessenreeks opgesteld is vanuit een algebraïsch perspectief. Om een antwoord te kunnen formuleren op deze tweede onderzoeksvraag worden verschillende methodologische instrumenten ingezet die grotendeels overeenkomen met deze die gebruikt worden voor de beoordeling van de eerste onderzoeksvraag. De volledige oplijsting van deze gebruikte methodologische modules kan u terugvinden in paragraaf 5.1.3. We lichten kort toe hoe we deze methodologische instrumenten specifiek voor deze onderzoeksvraag ingezet hebben.

Enkele Voorbeelden van richtvragen uit het logboek die bij de tweede onderzoeksvraag horen zijn ‘Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?’, ‘Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?’ en ‘Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?’. Zoals eerder aangehaald werden de antwoorden die de leerkrachten formuleerden op deze richtvragen opnieuw aangehaald tijdens het afsluitende interview met de leerkrachten, waarbij hen gevraagd werd om dit nog verder toe te lichten.

Op een soortgelijke manier zoals bij de eerste onderzoeksvraag beschreven staat maakte ik tijdens de lessenreeks die ik zelf in een van de drie deelnemende scholen gaf field notes tijdens de les en vlak na de lessen. Een voorbeeld van een van de vele field notes die ik gemaakt heb die specifiek bij de tweede onderzoeksvraag behoort gaat over een opvallend antwoord van een leerling op een vraag over Cayleytabellen wat ik zelf niet verwacht had, waaruit blijkt dat de leerling een goed inzicht heeft in de werking van Cayleytabellen. De inhoud van deze opmerking zal besproken worden in het gedeelte rond de resultaten van het onderzoek.

De behandeling van de interviews met de leerlingen in het licht van deze tweede onderzoeksvraag is zeer gelijkaardig als deze van de eerste onderzoeksvraag. Voor deze tweede onderzoeksvraag was het wel relevanter om telkens een sterkere en een minder sterke leerling te interviewen. Voorbeelden van vragen uit de leerlingeninterviews die gekoppeld kunnen worden aan deze onderzoeksvragen zijn ‘Kan je nog eens het verschil uitleggen tussen de betekenissen van associativiteit en commutativiteit?’ en ‘Wat vind je zelf het moeilijkste: werken binnen één bepaalde soort groep of zoeken naar een isomorfisme tussen groepen? Kan je uitleggen waarom?’. Deze laatste vraag is een voorbeeld van hoe de logboeken van de leerkrachten ook een invloed gehad hebben op de interviews met de leerlingen. Deze laatste vraag is immers op het programma van de leerlingeninterviews beland nadat een van de deelnemende leerkrachten in het logboek had aangegeven dat het in de klas opviel dat de leerlingen minder moeite hadden met het zoeken naar isomorfisme in vergelijking met het zuiver werken binnen een bepaald voorbeeld van een groep, waarbij bijvoorbeeld twee verschillende permutaties samengesteld moesten worden.

Voor deze tweede onderzoeksvraag spelen de kwantitatieve data afkomstig uit de resultaten van de afgenomen toets op het einde van de lessenreeks een grotere rol. Sommige vragen van de toets sluiten immers naadloos aan bij de specifieke eindterm. Zo wordt ‘Procedurele kennis: rekenen in groepen’ bijvoorbeeld afgedekt door vraag 1a, waarbij de leerlingen berekeningen moeten uitvoeren om enkele Cayleytabellen verder aan te vullen. Verder wordt ‘Procedurele kennis: Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt’ rechtstreeks getest door middel van vraag 1b. Daarnaast hebben we met de toets niet enkel gepeild naar de doelen die opgelijst staan in de eindterm maar hebben we ook oog gehad voor onze bredere en meer diepgaande doelen van de lessenreeks. Het gedeelte over deelgroepen uit onze lessenreeks wordt bijvoorbeeld niet vermeld in de specifieke eindterm. Over dit gedeelte stelden we de volgende vraag op de toets, die creativiteit en inzicht van de leerlingen vereist: ‘Zoek zelf een deelgroep van de groep $\mathbb{Z}, +$. Dit zagen we als een vrij moeilijke vraag, misschien wel de moeilijkste van de toets, aangezien dit specifieke

voorbeeld niet in de les behandeld geweest is.

5.3 De lessenreeks als een uitstap naar de onbekende abstracte kant van de zuivere wiskunde

Wanneer we de inhoud van deze lessenreeks vergelijken met de ‘klassieke’ inhoud van het wiskundecurriculum dat de leerlingen uit de doelgroep van de specifieke eindterm die aan deze lessenreeks verbonden is, dan zien we dat deze van een zeer andere aard of inborst is. Op geen enkele andere plaats krijgen de leerlingen nog een rechtstreekse kennismaking met een algebraïsch onderwerp dat inherent verbonden is met een vrij hoog abstractieniveau. Je zou dus kunnen zeggen dat de leerlingen die vandaag de dag kiezen voor het in het sterkste in voege zijnde wiskundecurriculum afstuderen van de secundaire school zonder ook maar ergens een degelijke inleiding te krijgen op een onderwerp wat een hedendaagse wiskundige zou omschrijven als abstracte, zuivere wiskunde. Moet daar een verandering in komen? Net zoals de commissie die zich gebogen heeft rond de hervorming van de eindtermen ben ook ik van mening dat er voor het sterkste wiskundepubliek ergens in het secundair onderwijs een uitstap gemaakt moet worden naar de zuivere en abstracte wiskunde. Is groepentheorie hiervoor een gepaste en aan te raden uitweg? Deze bedenking stellen we centraal in de derde onderzoeksvraag.

5.3.1 Onderzoeksvraag 3

Zoals daarjuist al is aangehaald kan de lessenreeks die we voor dit masterproefonderzoek hebben ontwikkeld bekeken worden als een eerste rondleiding die de leerlingen uit het testpubliek krijgen in een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde. Dit ligt buiten de wiskundige comfortzone van die leerlingen, maar hoe ver, en hoe gaan deze leerlingen daar op reageren? In het doelpubliek van de nieuwe specifieke eindterm, en in ons testpubliek, zitten daarnaast ook ongetwijfeld enkele leerlingen die wiskundige ambities hebben met hun keuze naar het hoger onderwijs toe. Hoe reageren zij wanneer ze voor de eerste keer zien hoe abstracte zuivere wiskunde eraan toe gaat? En wat met de leerlingen die een minder grote voorliefde voor de abstracte zuivere wiskunde hebben?

We willen bij de onderstaande derde onderzoeksvraag allereerst de opmerking maken dat het niet per se een doel is van de lessenreeks om alle leerlingen enthousiast te maken voor de abstracte en zuivere wiskunde in het algemeen. Het doel van deze lessenreeks is immers om een beeld te schetsen bij deze leerlingen van de abstracte kamer van de wiskunde die groepentheorie is. We verwachten dat de leerlingen uit het testpubliek hier heel verschillend op gaan reageren. Waarschijnlijk zullen sommigen dit maar niets vinden, terwijl andere leerlingen hier dan net enthousiast op zullen reageren. We hebben dus zeker niet voor ogen om met deze lessenreeks alle leerlingen die deze lessenreeks volgen om te vormen in abstractieminnende beroepswiskundigen in spe. Als er echter sommige leerlingen door middel van deze lessenreeks meer warm zouden worden voor de zuivere wiskunde, dan aanzien we dat als een mooi meegenomen bijwerking van deze lessenreeks. Aan de andere kant willen we hier ook even de opmerking maken dat dit niet automatisch betekent dat we met deze lessenreeks de abstracte en zuivere wiskunde openlijk zouden willen voortrekken of ophemelen ten opzichte van de meer toegepaste wiskunde. We willen leerlingen die interesse voor wiskunde hebben laten zien dat er zoiets bestaat als ‘wiskunde om de wiskunde’, maar we willen hierbij bijvoorbeeld de nuttigheidswaarde van de wiskunde in andere domeinen niet minachten. We bekijken de abstractie en de zuiverheid van de wiskunde die in onze lessenreeks naar voren komt als een essentieel deel van de wiskunde waar de leerlingen in de doelgroep mee kennisgemaakt zouden moeten hebben. Op die manier kunnen de leerlingen een beter beeld vormen van hoe de wiskunde vandaag de dag als wetenschap beoefend wordt en kunnen ze dit meenemen in hun afwegingen voor de keuze van hun toekomstig studietraject in het hoger onderwijs. Dit zijn allemaal nuances die we willen omvatten in de derde onderzoeksvraag, die u in de onderstaande kader kan terugvinden:

Onderzoeksvraag 3

Slaagt deze lessenreeks erin om de leerlingen te laten kennismaken met een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde en welk effect heeft dit op de leerlingen?

Om een antwoord te kunnen formuleren op deze derde en laatste onderzoeksvraag worden opnieuw verschillende methodologische instrumenten ingezet die grotendeels overeenkomen met deze die gebruikt worden voor de beoordeling van de eerste twee onderzoeksvragen onderzoeksvragen. We concretiseren hieronder hoe we deze methodologische instrumenten ingezet hebben in het kader van deze derde onderzoeksvraag.

Voorbeelden van enkele richtvragen die bij deze derde onderzoeksvraag horen en die aan de leerkrachten gesteld werden in het logboek zijn ‘Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/ niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van deze les’ en ‘Sprak het item van eindige groepen van gehele getallen modulo n / symmetriegroepen/ permutatiegroepen de leerlingen volgens u meer of minder aan dan de eerder geziene voorbeelden van groepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?’. De antwoorden die de leerkrachten formuleerden op deze richtvragen werden ook opnieuw aangehaald tijdens het afsluitende interview met de leerkrachten, waarbij hen gevraagd werd om dit nog verder toe te lichten. Daarnaast werden er nog extra vragen gesteld in de interviews met de leerkrachten die gekoppeld kunnen worden aan deze onderzoeksvraag, zoals ‘Wat vindt u van het abstractieniveau van de lessenreeks?’ en ‘Reageerden de leerlingen anders op deze lessenreeks dan op een andere lessenreeks in de extra uren wiskunde? Wat zijn de verschillen, zowel in positieve als negatieve zin?’. Voor de reacties in de klas waar ik zelf de lessenreeks gaf werden deze logboekvragen vervangen door field notes.

De interviews met de leerlingen spelen voor deze onderzoeksvraag een grotere rol. Zo werd er bijvoorbeeld telkens aan de leerlingen gevraagd welke onderwerpen of gedeeltes van de lessenreeks ze het interessantst vonden of waar ze zelf van vonden dat ze het meest enthousiast van werden. Verder kunnen we ook de volgende vragen uit de interviewleidraad met de leerlingen koppelen aan het eerste gedeelte van de derde onderzoeksvraag: ‘Voelde je dat groepentheorie een heel ander onderwerp is dan de onderwerpen uit je gewone lessen wiskunde? Hoe voel je dat: andere manier van aanpak/studeren? Bevalt het je meer of minder dan anders?’ en ‘Heeft deze lessenreeks rond groepentheorie je interesse doen krijgen voor andere kamers van de zuivere wiskunde?’. Daarnaast werd er ook gepolst van wat de leerlingen vonden van de abstractiegraad van deze lessenreeks. Ook werd er aan de geïnterviewde leerlingen die eraan dachten om na hun zesde jaar een wiskundig georiënteerde studie aan te vatten in het hoger onderwijs gevraagd welke rol deze lessenreeks gespeeld heeft in hun verdere studiekeuze en in de manier waarop zij naar de abstracte en zuivere kant van de wiskunde kijken.

6 Resultaten en conclusies

In dit hoofdstuk bespreken we de resultaten en de conclusies van het interventieonderzoek. We gebruiken hierbij de antwoorden van de leerkrachten in het logboek en de semigestructureerde interviews, de gemaakte field notes, de semigestructureerde interviews met de leerlingen en de resultaten van de afsluitende toets als uitgangspunt om op basis hiervan conclusies te kunnen trekken. We bespreken de resultaten per onderzoeksvraag afzonderlijk, in dezelfde volgorde zoals deze zijn voorgesteld in het vorige hoofdstuk.

6.1 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 1

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten en conclusies in verband met de eerste onderzoeksvraag. De eerste onderzoeksvraag houdt verband met het begin van de lessenreeks. Voor de instap van de lessenreeks hebben we de inzichten uit de wetenschappelijke literatuur rond het werken met getallenverzamelingen, het werken met tegenovergestelden en het rigoureus oplossen van vergelijkingen gecombineerd. Andere bronnen, zoals Larsen (2009), die vertrekken vanuit het principe van guided reinvention vermelden dat de leerlingen tijdens het herontdekkingsproces van de definitie van een groep zelf moeilijk het bestaan van inversen en associativiteit opnoemen. Via onze lessenreeks probeerden we om de leerlingen de definitie van een groep ook zelf te laten herontdekken, waarbij deze onderdelen van de definitie hopelijk wel op een natuurlijke manier opgenoemd zouden worden. De hierbij horende eerste onderzoeksvraag luidt als volgt:

Onderzoeksvraag 1

Is de aanpak vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen effectief om de leerlingen zelf tot alle axioma's in de definitie van een groep te laten komen?

Om een eerste beeld te krijgen van hoe effectief de instap van de lessenreeks was om de leerlingen de definitie van een groep te laten herontdekken, kunnen we kijken naar welke delen van de definitie in de praktijk door de leerlingen zelf opgenoemd werden op het einde van de instap van de lessenreeks. In het logboek voor de leerkrachten stond er een vraag die hier rechtstreeks naar peilde, namelijk 'Welke axioma's werden door spontaan door de leerlingen aangehaald bij de overgang naar de definitie van een groep en bij welke axioma's was er meer sturing nodig?'. De antwoorden van de leerkrachten op deze richtvraag waren allebei vrij positief. In het logboek werd de vraag naar de effectiviteit van de aanpak die in de eerste onderzoeksvraag centraal staat dus rechtstreeks bevraagd. We nemen de expliciete antwoorden van de twee leerkrachten hieronder over:

Alle axioma's werden vermeld bij de definitie van een groep. De link met het oplossen van vergelijkingen heeft dat mogelijk gemaakt.

Leerkracht B in het logboek

De opbouw van de eerste les zit goed in elkaar, dus de leerlingen hadden geen probleem om zelf de axioma's aan te halen. Associativiteit werd eventjes verward met commutativiteit, maar dat werd snel rechtgezet. In het begin begrepen ze niet direct waarom ik tegenovergestelde gebruikte in plaats van tegengestelde, maar ook dat werd met de voorbeelden duidelijk.

Leerkracht C in het logboek

Ook in de klasgroep waar ik zelf de lessenreeks gaf werden alle axioma's zonder al te veel moeite door de leerlingen zelf opgenoemd. Alleen bij de geslotenheid van de bewerking was er meer sturing van de leerkracht zelf nodig. In alledrie de testgroepen zijn alle axioma's van de definitie van een groep dus herontdekt op het einde van het eerste lesblok. Dit pleit dus voor een positief antwoord op de eerste onderzoeksvraag. We verduidelijken en nuanceren dit in de volgende paragrafen, waarbij we eerst ingaan op het algemene beeld van de leerkrachten op het verloop van het eerste lesblok.

6.1.1 Terugblik van de leerkrachten op het eerste lesblok: algemeen beeld en guided reinvention

De op guided reinvention geïnspireerde werkwijze met het veelvuldige gebruik van de werkvorm think-pair-share werkte vlot in de klasgroep waar ik zelf de les gaf. Ik voelde me tijdens deze les niet als een leerkracht die de les met veel moeite moest sturen. De opeenvolging van de verschillende richtvragen met de daarbijhorende discussiemomenten verliep in het algemeen op een natuurlijke en vlotte manier. De twee andere leerkrachten formuleerden in de interviews een gelijkaardige visie over de vlothheid van het lesverloop bij de lesinstap. We vermelden ter illustratie het onderstaande antwoord van leerkracht C op de vraag ‘Wat vond u in het algemeen van de aanpak (vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het rigoureuus oplossen van vergelijkingen om over te gaan naar de definitie van een groep)?’:

“Goed, goed. In het begin dacht ik zo van oei oei oei, allez wat staat er hier nu allemaal en hoe wordt dat aangepakt? Maar als ge daar dan wat tijd insteekt, [...] In het begin had ik het niet echt door, heb ik dat helemaal moeten doorlezen van eh, waar willen ze naartoe en wat is nu de bedoeling? Maar na dat een paar keren doorgelezen te hebben, en daarmee bezig te zijn en zo, vond ik dat wel een goede aanpak. En ook naar de leerlingen. Het moment dat ik dat begon te geven, dat sloeg wel aan, dat werkte wel eigenlijk bij die leerlingen. Dus da’s dan natuurlijk leuk he. Je hebt dan een bende pubers voor u zitten, en die werken echt mee. Die doen mee, en die antwoorden op de vragen en die redeneren mee. Wat dat ik ook verrassend vond bij deze lessenreeks is: Ik had dan een volgende vraag in gedachten, he ik wist van oké nu moeten we daar naartoe, en die leerlingen stelden dan zelf die vraag, terwijl dat dat eigenlijk mijn volgende vraag was. [...] En dat vond ik wel heel plezant, dat ze echt aan het redeneren waren in mijn plaats bijna he. [...] Dus dat vond ik wel een goede aanpak, dat werkte bij die leerlingen.”

Leerkracht C in het interview

In bovenstaande quote wordt duidelijk dat leerkracht C in de instap van de lessenreeks echt heeft kunnen optreden als een gids in het gedachtegoed van guided reinvention. De leerlingen stelden uit zichzelf vragen die als kapstok gebruikt konden worden om het volgende gedeelte van de opbouw van de lesinstap aan vast te hangen. Deze ervaring had ik op sommige plaatsen zelf ook tijdens het lesgeven. Leerkracht C heeft de opbouw vanuit de intuïtie rond het begrip tegenovergestelden tezamen met de aanpak gebaseerd op guided reinvention in de klas dus in het algemeen ervaren als een vlot werkend uitgangspunt. Bij leerkracht B was er op dit vlak een duidelijkere opdeling tussen het eerste gedeelte van de les waarbij er gebrainstormd werd rond tegenovergestelden in een dagelijkse context en het tweede gedeelte van de les waarbij er gewerkt werd met het oplossen van vergelijkingen. Over het eerste gedeelte van de les schrijft leerkracht B het volgende in het logboek:

Het intuïtief gedeelte in het begin van de les verliep heel vlot. Leerlingen kwamen zelf met de voorbeelden $\text{kat} \leftrightarrow \text{muis}$ en $\text{kat} \leftrightarrow \text{hond}$. Ook het werken binnen één verzameling werd spontaan toegepast. Dat kwam naar vooral naar voren bij het zoeken naar het tegenovergestelde van ‘blauw’. Ze dachten sowieso aan een kleur. Verrassend was voor mij dat ze een tegenovergestelde van ‘steen’ verzonnen. Uiteindelijk werkte deze aanloop naar de ‘ideale wereld’ wel.

Leerkracht B in het logboek

De ervaringen van deze leerkracht komen voor dit gedeelte van de les dus grotendeels overeen met de ervaringen van de andere twee leerkrachten. Deze leerkracht vermeldt dat het tweede gedeelte van deze les in zijn klas minder vlot verliep. Over het tweede gedeelte van de eerste les zegt leerkracht B het volgende:

Het moeilijkste van deze les was de stap naar het oplossen van vergelijkingen. Leerlingen moeten hierbij een gedachtenexperiment toepassen en hun voorkennis even loslaten. Dat lukte bij de meeste leerlingen niet. Ze begrepen de bedoeling niet. Een aantal leerlingen gaf aan de balansmethode nooit geleerd te hebben, maar onmiddellijk gewerkt te hebben met ‘overbrengen’ van een term. Uiteindelijk was er één leerling die de juiste stappen had gezet. Ik heb van zijn

oplossingsmethode gebruik gemaakt om de les weer op de rails te krijgen.
Leerkracht B in het logboek

In dit tweede gedeelte van de les was er in klasgroep B dus meer sturing van de leerkracht nodig, waarbij de leerkracht zijn rol als gids in het kader van guided reinvention meer moest uitspelen. Het lijkt er dus op dat de overgang naar het oplossen van vergelijkingen in klasgroep B een kantelpunt in de eerste les was, waarbij de meeste moeilijkheden optraden. Daar gaan we in de volgende paragraaf dieper op in.

6.1.2 Meest opvallende moeilijkheden: nauwkeurig oplossen van de lineaire vergelijking

Zoals uit de bovenstaande quote van leerkracht B uit het logboek blijkt, is de overgang naar het oplossen van vergelijking het moeilijkste gedeelte van de ganse eerste les. De leerlingen vinden het hierbij moeilijk om hun automatische piloot bij het oplossen van vergelijkingen af te zetten en nauwkeurig te beredeneren en op te schrijven welke precieze tussenstappen er moeten gezet worden bij het oplossen van de gegeven lineaire vergelijkingen. Leerkracht B geeft aan dat er één leerling was die alle correcte tussenstappen had gezet, waarbij het antwoord van die leerling gebruikt werd om klassikaal de redenering op verder te bouwen. Achteraf gezien pleit dit in het voordeel van onze keuze om in de eerste les een klassikaal tempo aan te houden. Indien elke leerling op zijn eigen tempo al de stappen uit de redenering doorheen de eerste les had moeten zetten, was voor het grootste deel van de leerlingen de les hier spreekwoordelijk in het water gevallen.

Ook in klasgroep A, waar ik zelf de les gaf, was de overgang naar het rigoureuus oplossen van vergelijkingen een soort van ‘bottleneck’. In de field notes noteerde ik dat slechts drie leerlingen na verloop van tijd een correcte redenering konden opstellen. Een van deze leerlingen telde echter bij beide leden hetzelfde op aan de rechterkant, zodat deze leerling nog een extra tussenstap invoerde die commutativiteit eiste. Het feit dat de leerlingen in klasgroep B hun voorkennis moeilijk konden loslaten merkte ik zelf in klasgroep A minder op. Volgens mij is dit zo omdat in klasgroep A het gedachtenexperiment op zich wel goed werkte. Hierbij moesten de leerlingen nadenken hoe ze een computer die enkel een binaire bewerking kon uitvoeren de vergelijking, die voor hen triviaal was, zouden laten oplossen. In het interview verduidelijkte leerkracht B deze moeilijkheid met het loslaten van de voorkennis. Hij gaf hierbij aan dat de leerlingen op dat punt in de eerste les blijkbaar minder goed wisten wat er van hen verwacht werd. De link naar de computer die een binaire operatie uitvoert werkte niet verhelderend genoeg aangezien de leerlingen volgens hem niet echt aan het computationeel denken zijn.

In tegenstelling tot in klasgroepen A en B verliep dit gedeelte van de les verrassend genoeg wel zeer vlot in klasgroep C. Wanneer specifiek gepolst wordt naar dit gedeelte van de les antwoordt leerkracht C in de volgende bewoordingen:

“[Dat verliep] vlot. Dat ging goed, dat ging goed. Ja daar waren mijn bollebozen heel rap mee weg en die hadden echt wel door van oké. Misschien is dat ook met die matrices, ik weet dat niet. Omdat ze ook bewijzen met matrices hebben moeten doen in het algemeen, dat ze wel goed wisten van oké we blijven wel langs links optellen en we gaan niet de ene keer langs links en de andere keer langs rechts. Dus bij die matrices komt dat ook wel voor he, dat ze moeten oppassen langs welke kant. Maar ze hadden wel door waar dat ze mee bezig waren. Dat ging eigenlijk verrassend vlot vond ik. [...] En wij hebben ook al wel een stukske voor deze [lessenreeks] bewijzen en redeneren gedaan, dus dat ge zo echt wel redeneringen moet kunnen opschrijven en zo. En daar is het ook stap voor stap en dat ge elke tussenstap moet kunnen verklaren, dus we hadden al wel zo van die dingen gedaan.”

Leerkracht C in het interview

In klasgroep C verliep dit gedeelte dus veel vlotter in vergelijking met de andere klasgroepen. De leerkracht haalt hiervoor twee grote redenen aan. Ten eerste hebben de leerlingen van deze klasgroep al gewerkt rond bewijzen en redeneren, waarbij het rigoureuus noteren van alle redeneringen en tussenstappen in een bewijs al uitvoerig is ingeoeft. Dit vergemakkelijkt de opgave voor deze leerlingen in vergelijking met

andere leerlingen die hier nog nooit mee te maken gehad hebben. Ten tweede haalt de leerkracht de link met het onderdeel rond matrices dat behandeld werd in de wiskundelessen aan. Het is immers zo dat bij (bewijzen met) matrices commutatивiteit niet meteen aangenomen mag worden, zodat de leerlingen daar meer op hun hoede moeten zijn wanneer ze vrij elementaire bewerkingen uitvoeren met matrices. Het is belangrijk om hierbij te vermelden dat de leerlingen uit klasgroep C leerlingen uit het vijfde middelbaar zijn. Deze leerlingen hebben dus nog maar net kennisgemaakt met matrices, waardoor deze visie en ingebakken voorzichtigheid waarschijnlijk nog vers in het geheugen ligt bij deze leerlingen. Dit kan ook een verklaring zijn waarom dit gedeelte bij de zesdejaarsleerlingen uit klasgroepen A en B minder vlot verliep.

6.1.3 Meest opvallende moeilijkheden: verwarring associativiteit-commutatивiteit

Een tweede opvallende moeilijkheid tijdens de eerste les die in de verschillende klasgroepen naar voren kwam, is de verwarring tussen de begrippen associativiteit en commutatивiteit die soms optrad bij de leerlingen. Leerkracht C brengt dit aandachtspunt op de volgende manier op de radar in het logboek:

De opbouw van de eerste les zit goed in elkaar, dus de leerlingen hadden geen probleem om zelf de axioma's aan te halen. Associativiteit werd eventjes verward met commutatивiteit, maar dat werd snel rechtgezet.

Leerkracht C in het logboek

In dit korte zinnetje duidt de leerkracht dus aan dat er een hardnekkige verwarring tussen de termen associativiteit en commutatивiteit aanwezig was bij de leerlingen in klasgroep C. Wanneer er tijdens het interview gevraagd wordt om dit verder toe te lichten, antwoordt de leerkracht het volgende:

“Ja die kunnen dat gewoon niet onthouden, het verschil tussen commutatивief en associatief. Blijkbaar is dat moeilijk. Wat hoort nu bij wat? Ik denk dat die in de eerste graad, ... dat die die termen in de eerste graad tegenkomen. [...] Maar in het zesde jaar heb ik dat dan opnieuw nodig bij ruimtemeetkunde, en die hebben dat dan eigenlijk in het vijfde jaar herhaald bij die matrices, dus dan denk ik nu gaan die toch niet meer verward zijn tussen commutatивief en associatief, en dat blijft. Dus dat is gewoon, die weten niet het verschil tussen commutatивief en associatief. Dus die weten dat er twee moeilijke woorden zijn, maar die weten niet welk moeilijk woord bij wat hoort. Ik vind dat raar, maar blijkbaar is dat.”

Leerkracht C in het interview

In klasgroep A was de verwarring tussen deze twee begrippen in de eerste les op een vergelijkbare manier aanwezig. In de field notes heb ik teruggevonden dat enkele leerlingen de termen door elkaar haalden bij het gedeelte met de oplossingen van vergelijkingen, maar nadat duidelijk gemaakt was welke term bij welke eigenschap hoorde was dit probleem van de baan. In het verdere verloop van de lessenreeks kwam er nog wel een paar keren voor dat de leerlingen deze termen met elkaar verwisselden, maar ze corrigeerden zichzelf dan meestal snel. Het is dus niet zo dat deze verwarring op zich een onoverkomelijk groot probleem was tijdens de eerste les, maar het is wel opvallend dat het in de beide klasgroepen voorkwam.

Leerkracht B vermeldt deze verwarring niet tijdens zijn feedback op het eerste lesblok. In het logboek na het derde lesblok schrijft hij echter het volgende antwoord op de vraag ‘Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?’:

Ik heb twee denkfouten ontdekt: [...]. Verder verwarden leerlingen associativiteit met commutatивiteit. Hun redenering waarom een bepaalde bewerking associatief is, was fout. Ze gebruikten de symmetrie in de Cayleytabel ten opzichte van de hoofddiagonaal, en toonden dus eigenlijk commutatивiteit aan.

Leerkracht B in het logboek

Ook in klasgroep B blijkt de verwarring tussen de begrippen associativiteit en commutatивiteit dus een wederkerend feit te zijn. In het interview haalt leerkracht B ook het feit dat de beide begrippen tegelijkertijd

ver weg in het eerste jaar aangebracht worden als mogelijke verklaring voor deze verwarring aan. Hier valt ook een link te leggen naar de observatie dat de balansmethode bij een groot gedeelte van de leerlingen niet meer meteen klaarzit als parate kennis. Ook dit is een onderwerp dat aangebracht wordt in het eerste middelbaar. Misschien kan dit een pleidooi zijn om hier doorheen de ganse zes jaren van het secundair onderwijs meer aandacht aan te besteden in de wiskundelessen zodat deze kennis niet verloren raakt, wat nu dus blijkt wel het geval is?

6.1.4 Positie van de leerlingen ten opzichte van de intuïtieve aanpak?

In de vorige paragrafen hebben we al een beeld gekregen van hoe de leerkrachten terugkijken naar de instap van de lessenreeks die gebruik maakt van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen om toe te werken naar de definitie van een groep. In deze paragraaf gaan we na hoe de leerlingen deze aanpak aankijken. Een eerste indicatie die een blik werpt op de situatie van de leerlingen in dit gedeelte van de lessenreeks indicatie vinden we in het logboek van leerkracht B:

Een aantal leerlingen is in de war door de lange aanloop vanuit intuïtie. Dat zijn leerlingen die eigenlijk graag wiskunde op een abstracter niveau doen. Zij vinden de overgang van de intuïtie naar de wiskunde geforceerd. Zij hebben zich vaak afgevraagd wat we nu eigenlijk aan het doen zijn.

Leerkracht B in het logboek

Wanneer er in het interview aan deze leerkracht gevraagd wordt om hier wat meer over uit te weiden verduidelijkt leerkracht B dat die uitspraak vooral ging over het eerste gedeelte van de les waarin gewerkt werd met tegenovergestelden van objecten uit het dagelijkse leven. Vanaf de overschakeling naar de ideale wereld van de tegenovergestelden en het oplossen van vergelijkingen werd het voor hen beter. Wanneer deze leerkracht achteraf terugblijkt op deze eerste les, geven de leerlingen aan dat ze de werkwijze van de eerste les maar wat ‘vaag’ vonden. Zelf voelde ik dit niet meteen zo aan in de klasgroep waar ik zelf de les gaf. Ik had de indruk dat de leerlingen net geprikkeld werden door de onalledaagse aanpak, in plaats van dat dit hen hier sceptisch tegenover deed staan. Ook uit het eerder vermelde citaat van leerkracht C blijkt dat de leerlingen in die klasgroep geïnteresseerd leken te zijn en goed meewerkten. Leerkracht C schat tijdens het interview de positie van de leerlingen ten opzichte van deze aanpak als volgt in wanneer haar voorgelegd werd dat er in een andere klasgroep is opgemerkt dat sommige leerlingen de aanpak maar wat vaag vonden:

“Nee, bij mij was dat niet. Misschien, ik denk dat in een zesde misschien rapper gebeurt dan in een vijfde. Die vijfdejaars zijn ook nog iets jonger en die doen eigenlijk nog rapper wat dat ge vraagt denk ik. [...] Ik kan me dat in een zesde nu ook wel voorstellen, dat er leerlingen zeggen van “Wat gade gij nu doen.”. [...] Dus misschien dat ik daar de leeftijd van de leerlingen wat mee had.”

Leerkracht C in het interview

Leerkracht C geeft in de bovenstaande quote uit het interview dus aan dat ze tijdens de eerste les niet meteen een sceptische houding van de leerlingen ten opzichte van de niet alledaags werkwijze en werkvormen heeft opgemerkt. Volgens haar speelt het verschil tussen de instellingen van de leerlingen uit het vijfde en het zesde middelbaar daarbij een grote rol. Leerlingen van het vijfde jaar zouden volgens deze leerkracht de leerkracht meer blindelings volgen en een minder sceptische blik hebben dan doorgaans het geval is bij de leerlingen uit het zesde jaar.

Wanneer we vervolgens een kijkje nemen naar de antwoorden van de leerlingen in de interviews, dan merken we bij de leerlingen van klasgroep B inderdaad een ietwat sceptische houding ten opzichte van de aanpak die gehanteerd werd in de instap van de lessenreeks. Opvallend hierbij is dat een van deze leerlingen uit klasgroep B zijn antwoord zowel het gedeelte over de intuïtie rond het begrip tegenovergestelde als het gedeelte over het rigoureuze oplossen van vergelijkingen aanhaalt. Deze leerling uit klasgroep B, die door de leerkracht aangeduid was als een van de sterke leerlingen uit de klasgroep, zegt hierover het volgende in het interview:

“Goh, ik vond dat dat in het begin nogal vrij traag ging en dat ik de link tussen de twee [de tegenovergestelden en het concept groep] niet echt begreep, nu eigenlijk nog altijd niet. [...] Ik heb liefst gewoon direct een definitie of iets om mee te werken en zo die alledaagse dingen, dat zat precies op een verkeerde plaats of zo of dat paste niet binnen de context wiskunde. Dat was een beetje vreemd om te doen ook. [...] En die vergelijkingen, dat voelde ook raar omdat dat zo terug te basis was, en ja, dat voelde ook niet juist om te doen of zo.”

Leerling 1 uit klasgroep B tijdens het interview

In de bovenstaande quote wordt er duidelijk dat er binnen de groep van leerlingen uit klasgroep B inderdaad een gevoel heerst dat de intuïtieve exploratie van de tegenovergestelden maar een vaag uitgangspunt is. Opvallend hierbij is ook dat de leerling uit de bovenstaande quote aangeeft dat hij liever gewoon meteen een definitie van een groep had gekregen om dan meteen hiermee wiskundig aan de slag te gaan. Dit komt overeen met de visie van leerkracht B dat deze argwanende en verwarde houding vooral terug te vinden was bij leerlingen die eigenlijk graag wiskunde op een abstracter niveau doen. Deze leerling had immers graag meteen een abstracte definitie van een groep gehad.

Deze sceptische houding was niet in alle klasgroepen verspreid. De geïnterviewde leerlingen uit klasgroep B zijn unaniem over de ‘vaagheid’ van de instap van de lessenreeks, terwijl de geïnterviewde leerlingen uit klasgroep A in het interview expliciet aangeven dat zij dit niet zo hebben aan gevoeld. Bij de leerlingen van klasgroep C waren de meningen verdeeld, waarbij één leerling minder aangeeft dat dit geen probleem vormde terwijl de andere leerling ook wat meer haar twijfels uitsprak over deze aanpak. Een van de geïnterviewde leerlingen uit klasgroep A beschrijft zijn terugblik op de intuïtieve exploratie van de tegenovergestelden en de overgang naar de definitie van een groep als volgt:

“Bij mij persoonlijk, ik vind dat juist, ... dan schiet ik juist wakker eigenlijk. Je gaat WiskundePlus doen [de naam voor de seminarieuren wiskunde in school A], je doet de acht uren wiskunde, en ineens wordt er dan gevraagd “Wat is het tegenovergestelde van een kat?” of “Wat is het tegenovergestelde van een hond?”. Dan begin ik al te denken: wat heeft dit met wiskunde te maken en dan begint het bij mij eigenlijk al een beetje te draaien van interesse. Dan zit ik eigenlijk op het puntje van mijn stoel eerlijk gezegd.”

Leerling 1 uit klasgroep A tijdens het interview

Deze quote toont aan dat niet elke leerling, ook niet elke leerling uit het zesde jaar, een vaag beeld overhoudt van het eerste gedeelte van de lessenreeks en meer specifiek de intuïtieve exploratie van de tegenovergestelden. Deze leerling geeft aan dat de ongewone aanpak hem net meer prikkelt om goed op te letten tijdens dit gedeelte van de les en om hierbij de link met de wiskunde te achterhalen. Dit is een volledige tegenstelling ten op zichte van de argwanende blik die opgemerkt is in klasgroep B. Waar de geïnterviewde leerling uit klasgroep B de link tussen de tegenovergestelden, het oplossen van vergelijkingen en de definitie van een groep en de wiskunde in het algemeen niet goed inziet of maar ‘vaag’ vindt, geeft de geïnterviewde leerling uit klasgroep A aan dat deze aanpak hem net aangezet heeft om de link tussen de verrassende instap en de wiskunde te gaan zoeken tijdens de eerste les.

6.1.5 Hoe goed onthouden de leerlingen de definitie van een groep?

Om de analyse bij de eerste onderzoeksvraag af te ronden kunnen we ook nog een blik werpen op de kwantitatieve data uit de toets die we beschikbaar hebben. In de toets werden er twee Cayleytabellen gegeven en verder aangevuld door de leerlingen. Vraag 1b van de toets luidde hierbij als volgt:

Ga na of de kandidaat-groepen overeenkomstig met deze Cayleytabellen voldoen aan de definitie van een groep door na te kijken of er voldaan is aan de voorwaarden uit de definitie van een groep. Waarom zijn deze kandidaat-groepen wel of niet een groep?

Bij deze vraag moesten de leerlingen vervolgens alle axioma's en elementen uit de definitie van een groep nagaan in de specifieke gegeven context. In de onderstaande twee tabellen worden de geanonimiseerde

resultaten van de leerlingen uit klasgroepen A en B op deze specifieke deelvraag getoond. De puntenverdeling van de leerlingen van klasgroep C op de verschillende deelvragen van de toets is niet gekend. De totale puntenverdeling op alle deelvragen van de toets staat ook volledig afgebeeld in bijlage 9.7.

Leerling	Vraag 1b (op 5)
1	5
2	4
3	5
4	5
5	5
6	4
7	5
8	5
9	5

Tabel 2: Overzicht van de punten behaald door de leerlingen uit school A op vraag 1b van de toets. Het maximaal te behalen aantal punten is 5.

Leerling	Vraag 1b (op 5)
1	5
2	3
3	3
4	3.5
5	3.5
6	3.5
7	4
8	3.5
9	3.5
10	3.5
11	5
12	3
13	5

Tabel 3: Overzicht van de punten behaald door de leerlingen uit school B op vraag 1b van de toets. Het maximaal te behalen aantal punten is 5.

Wanneer we de behaalde punten op deze deelvraag bekijken dan zien we dat er in het algemeen zeer goed gescoord wordt. In klasgroep A lost iedereen de vraag foutloos op, behalve twee leerlingen die bij beide kandidaat-groepen de geslotenheid van de bewerking vergeten na te gaan of vergeten te vermelden in hun antwoord. Bij klasgroep B zien we dat de punten op deze vraag vrij hoog liggen. Elke leerling behaalde een voldoende voor deze vraag. De leerlingen zijn dus in staat om enkele weken nadat ze de definitie van een groep hebben herontdekt deze definitie nog (grotendeels) toe te passen in een toetsvraag. Dit geeft ons een suggestie om te zeggen dat de instap die gezet is naar de definitie van een groep toe ervoor gezorgd heeft dat de leerlingen deze definitie op een succesvolle manier kunnen onthouden.

6.1.6 Conclusie eerste onderzoeksvraag

Wanneer we alles uit de bovenstaande paragrafen naast elkaar leggen, dan kunnen we concluderen dat de instap die vertrekt vanuit de intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en via het rigoureuze oplossen van vergelijkingen naar de definitie van een groep toewerkt bij ons testpubliek effectief geweest is om de leerlingen zelf tot alle axioma's van een groep te laten komen. De leerkrachten geven immers

aan dat de instap van de lessenreeks vrij vlot verlopen is en dat de leerlingen met het denkbeeld van guided reinvention in het achterhoofd zelf alle elementen uit de definitie van een groep hebben herontdekt en opgenoemd. Uit de toets blijkt ook dat de leerlingen na de lessenreeks de definitie van een groep nog altijd goed onder de knie hebben. Dit positieve beeld kunnen we nog wat nuanceren door te vermelden dat sommige leerlingen de gebruikte aanpak maar wat vaag vonden, hoewel deze mening niet algemeen verspreid was in het geïnterviewde leerlingenpubliek aangezien andere leerlingen net meer geprikkeld werden door deze onalledaagse werkwijze. Daarnaast bleek het rigoureuus oplossen van de lineaire vergelijkingen een cruciaal moment te zijn in de eerste les, waarbij niet elke leerling meteen op het juiste spoor zat. Ook werd er in de eerste een interessante verwarring opgemerkt tussen de begrippen associatief en commutatief, die echter niet heel bepalend was voor het verloop van de les.

6.2 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 2

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten en conclusies in verband met de tweede onderzoeksvraag. In de lessenreeks wordt de volledige inhoud van de nieuwe eindterm rond groepentheorie behandeld, maar wordt er ook wat dieper ingegaan op onderwerpen die ruimer liggen dan de eindterm. Voorbeelden van zulke onderwerpen zijn isomorfismen, eindige groepen van matrices, permutatiegroepen en deelgroepen. Deze tweede onderzoeksvraag luidt als volgt:

Onderzoeksvraag 2

Slaagt deze lessenreeks rond groepentheorie met hoofdzakelijk algebraïsche voorbeelden erin om de leerlingen de beoogde leerdoelen te laten behalen en hen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?

We splitsen de bespreking van de resultaten op in twee delen, waarbij we eerst specifiek kijken naar de effecten van de lessenreeks in verband met de nieuwe eindterm en waarbij we vervolgens breder kijken naar de onderwerpen van de lessenreeks die verder gaan dan enkel de eindterm.

6.2.1 Slaagt de lessenreeks erin om de leerlingen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?

Als eerste gaan we na of de lessenreeks die we ontwikkeld hebben voor dit onderzoek erin slaagt om de leerlingen te laten voldoen aan de nieuwe specifieke eindterm, die volledig weergegeven staat in hoofdstuk 2. Hiervoor bekijken we eerst de beschikbare toetsresultaten van de leerlingen uit klasgroepen A en B op de verschillende deelvragen van de afgenomen toets. Sommige vragen die op de toets gesteld werden zijn immers zo opgesteld dat ze rechtstreeks een of meerdere gedeelten van de eindterm ondervragen. We gaan hiervoor in op drie concrete onderdelen van de eindterm, die rechtstreeks bevraagd worden in de toets.

Nagaan of een gegeven verzameling met een gegeven bewerking een groep is

In de eindterm wordt er onder de titel ‘procedurele kennis’ aangegeven dat er verwacht wordt dat de leerlingen kunnen ‘bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt’. Dit wordt rechtstreeks getest op de toets in de vorm van vraag 1b. De volledige formulering van deze toetsvraag kan u terugvinden in bijlage 9.6. Zoals in paragraaf 6.1.5 al besproken is moeten de leerlingen in deze vraag nagaan of twee kandidaat-groepen, zijnde twee verzamelingen met verschillende bewerkingen, effectief voldoen aan de definitie van een groep of niet. Er geldt dat één van de twee kandidaat-groepen inderdaad voldoet aan de definitie van een groep terwijl de andere niet voldoet aan de definitie van een groep. De beschikbare deelresultaten van de leerlingen uit klasgroepen A en B op deze toets zijn weergegeven in tabellen 2 en 3. Elke leerling scoort meer dan de helft van het maximaal te behalen aantal punten op deze vraag en op twee leerlingen na behaalt iedereen uit klasgroep A het maximum aantal punten op deze vraag. Uit de toetsresultaten blijkt dus dat we kunnen stellen dat de leerlingen uit deze twee klasgroepen in staat zijn om na te gaan of een gegeven verzameling voorzien van een binaire bewerking een groep is.

Ook in het logboek werd er aan de leerkrachten specifiek gevraagd hoe vlot de leerlingen tijdens het tweede gedeelte van het eerste lesblok konden verifiëren of een gegeven verzameling met een binaire operatie een groep vormt. Beide leerkrachten reageren hier (in het geval van leerkracht C: voorzichtig) positief op, zoals blijkt uit hun onderstaande reacties uit het logboek:

Het verifiëren van de groepsaxioma's binnen een bepaalde structuur verliep vlot. Ze lieten zich alleen vangen bij het nulelement als de bewerking een vermenigvuldiging is. Maar dat is natuurlijk een interessante fout. Ook groepen met matrices kwamen vlot naar boven, zelfs de groep der inverteerbare matrices uitgerust met de vermenigvuldiging. Ook het aspect van al dan niet commutatief zijn kwam naar voren.

Leerkracht B in het logboek

Ja. Ik weet niet of dit bij elke groep leerlingen lukt. Dit is een kleine groep met sterke leerlingen. De leerlingen zijn goed mee. De voorbeelden en tegenvoorbeelden van groepen hebben ze zelf gevonden en ze konden de juiste verklaringen geven. Alle tussenstappen van de laatste bewijzen werden ook gegeven door hen. Ze bleven geboeid en zochten actief mee.

Leerkracht C in het logboek

In klasgroep A merkte ik tijdens het eerste lesblok zelf dat de leerlingen dit goed onder de knie hadden. Het enige schoonheidsfoutje dat de leerlingen maakten was het feit dat ze niet uit zichzelf inzagen dat het element nul bij de vermenigvuldiging voor problemen zorgt en geen deel mag uitmaken van de groep. De leerlingen sloten hierbij de nul niet uit, wat wel nodig is om te voldoen aan de definitie van een groep. Merk op dat leerkracht C in haar antwoord ook specifiek verwijst naar de behandeling van de bewijzen van de uniciteit van het neutraal element en de inverse van een element binnen een groep. Dit zijn ook twee bewijzen die expliciet deel uitmaken van de eindterm. Zij geeft hierbij dus aan dat de behandeling van deze bewijzen op een vlotte manier verlopen is in klasgroep C.

(Modulo)Rekenen in een groep en Cayleytabellen

De eindterm vermeldt onder de noemer 'procedurele kennis' dat de leerlingen moeten kunnen 'rekenen in een groep'. Daarnaast wordt er onder de titel 'conceptuele kennis' ook vermeld dat de leerlingen kennismakeert moeten hebben met een groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n en met Cayleytabellen van eindige groepen. Deze onderdelen van de eindterm worden rechtstreeks getest in deelvraag 1a van de toets. In deze vraag krijgen de leerlingen twee Cayleytabellen voorgeschoteld waarbij de elementen in beide gevallen de gehele getallen van 0 tot en met 5 zijn en waarbij de bewerking respectievelijk de optelling en de vermenigvuldiging modulo 6 zijn. In deze Cayleytabellen zijn dan enkele vakjes leeg gemaakt zodat de leerlingen door middel van de juiste berekening het vakje moeten vervolledigen. Hiervoor moeten de leerlingen dus weten hoe een Cayleytabel werkt, moeten ze aantonen dat ze kunnen rekenen binnen een groep en werken ze binnen een eindige verzameling van gehele getallen modulo n . Op deze manier toetst deze ene vraag dus de verschillende onderdelen van de eindterm. Wanneer we kijken naar de beschikbare deelresultaten van de leerlingen uit klasgroepen A en B op deze vraag, die ook volledig afgebeeld staan in bijlage 9.7, dan zien we dat elke leerling uit de beide klasgroepen een maximumscore behaalt op deze vraag. De resultaten op vraag 1a geven dus ook een positieve indicatie voor de vraag of de testpersonen die de lessenreeks gevolgd hebben voldoen aan de eindterm.

Men zou kunnen reageren op de bovenstaande alinea door te zeggen dat deelvraag 1a de aangehaalde onderdelen van de eindterm slechts op een vrij basale manier bevraagt. Dit kan gecounterd worden door een voorbeeld afkomstig uit de field notes uit klasgroep A dat aantoont dat (minstens) een van de leerlingen ook een veel dieper inzicht heeft in de onderdelen van de eindterm, en meer bepaald over het onderdeel 'Cayleytabellen' van het gedeelte 'conceptuele kennis' van de eindterm. In lesblok drie wordt er onderzocht welke van drie gegeven groepen met hun respectievelijke Cayleytabellen isomorf zijn. Twee ervan zijn isomorf aan elkaar en de derde groep is niet isomorf met de andere twee groepen. In de les werd door de leerkracht de opmerking gemaakt dat de structuur van de Cayleytabel van deze groep nu wel anders is dan die van de

Cayleytabellen van de andere groepen, maar dat er eventueel nog een overeenkomst zou kunnen verschijnen wanneer de elementen van de groep in een andere volgorde in de hoofding van de tabel gezet zouden worden. De leerkracht had om deze piste te onderzoeken en om te weerleggen dat zulke herschikking mogelijk is een hele redenering voorbereid, die meerdere dia's van de PowerPoint beslaat. De leerlingen kregen hierbij eerst de tijd om zelf een redenering op te bouwen. Een van de leerlingen die over het algemeen niet als een van de voortrekkers van de klasgroep beschouwd kan worden kwam hierbij na enkele seconden al aanzetten met de volgende redenering, die ik nu paraphraseer: "Als we de volgorde van de elementen zouden herschikken in de hoofding van de Cayleytabel, dan blijven de elementen die nu op de diagonaal in de tabel staan ook op die diagonaal staan, zij het misschien in een andere volgorde, omdat dat steeds de uitkomsten zijn van de bewerkingen van de verschillende elementen met zichzelf. Aangezien er een verschillend aantal elementen van de verschillende kleuren op de diagonaal staat kan er dus nooit zo een herschikking gevonden worden.". Ik was zelf enigszins verbaasd dat deze leerling deze redenering zo snel opgesteld had. Dit was een manier waarop ik zelf nog niet naar de probleemstelling gekeken had. Ik meen te kunnen stellen dat zulke redenering niet in het hoofd van een leerling kan ontstaan wanneer deze geen diep inzicht in de werking van Cayleytabellen heeft.

De eindterm bereikt na twee lesblokken

Wanneer we de resultaten van de leerlingen op de toets bekijken, dan zien we dat de leerlingen over het algemeen vrij tot zeer goed scoren op de vragen die rechtstreeks peilen naar de onderdelen van de eindterm. Wanneer we de eindterm naast de inhoud van de lessenreeks leggen, dan zien we dat na de behandeling van modulorekenen en groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$ in het tweede lesblok eigenlijk alle onderdelen van de eindterm de revue gepasseerd zijn. In de interviews met de leerkrachten werd er telkens even stilgestaan bij de eindterm en diens specifieke formulering. De reactie van leerkracht C hierop luidde als volgt:

"Ja, nu als ik al die eindtermen zie dan kan ik eigenlijk wel voor mijn leerlingen allemaal check, check, check zeggen. Dan hebben die dat allemaal wel bereikt, [...] eigenlijk zelfs na les[blok] twee al."

Leerkracht C in het interview

Een gelijkaardig antwoord werd door leerkracht B tijdens het interview gegeven. Hij vermeldt dat volgens hem de leerlingen uit zijn klasgroep zeker voldoen aan de eindterm, en dat dit in principe al zo is na het tweede lesblok. Hij haalt hierbij aan dat hij zeker verder zou gaan dan enkel de eerste twee lesblokken indien hij zou mogen kiezen om deze lessenreeks te implementeren in zijn lespraktijk, aangezien hij vindt dat de schoonheid van de lessenreeks in de drie laatste lesblokken zit. Je zou ervoor kunnen kiezen om de lessenreeks af te sluiten na de eerste twee lesblokken, maar de drie volgende lesblokken vormen een geheel. Je kunt de lessenreeks dus geven in twee lesblokken of in vijf lesblokken. Leerkracht B zou ervoor kiezen om alle vijf lesblokken te geven. Persoonlijk deel ik zijn mening hierover. Leerkracht C denkt hier op een gelijkaardige manier over, zoals blijkt uit de onderstaande quote uit het interview:

"Ik zou het zelf, als wiskundige, zou ik die symmetrieën en zo daar heel graag bij betrekken. Ja, ik vond dat nu wel een heel schoon einde, en dat bouwde op zo he. Dat werd altijd maar meer en meer en uiteindelijk kwaamt ge dan bij iets heel schoon terecht. Maar ja inderdaad als je enkel naar die eindtermen kijkt, dan moet ge niet met die symmetriegroepen en die deelgroepen en zo, dan hoeft dat allemaal niet he. "

Leerkracht C in het interview

In de drie verschillende klasgroepen geven de leerkrachten dus aan dat de leerlingen zeker voldoen aan de specifieke eindterm, wat door middel van de positieve toetsresultaten bekrachtigd wordt. Ze geven ook allemaal aan dat de eindterm eigenlijk al volledig afgedekt wordt door de eerste twee lesblokken, maar dat de schoonheid van de lessenreeks in het laatste gedeelte van de lessenreeks ligt, waarbij de overeenkomsten tussen eindige groepen van matrices, symmetriegroepen en permutatiegroepen worden onderzocht. Leerkracht B formuleert hierbij in het interview ook een lichte vorm van kritiek op de eindterm, waarbij hij deze eindterm

beschrijft met de bewoordingen ‘vis noch vlees’. Hij bedoelt hiermee dat de eindterm grotendeels op de vlakke blijft, terwijl er veel mooie zaken te ontdekken zijn voor de leerlingen binnen de groepentheorie. De formulering van de eindterm werkt in de hand dat de behandeling van deze eindterm in de praktijk er waarschijnlijk voor zal zorgen dat de mooie of spannende voorbeelden niet behandeld zullen worden in de les, terwijl de schoonheid van een lessenreeks groepentheorie net kan liggen in de onderwerpen zoals aan bod gekomen zijn in de laatste drie lesblokken van onze lessenreeks.

6.2.2 Wat met de doelen van de lessenreeks die verder gaan dan de eindterm?

In dit gedeelte bespreken we of de lessenreeks erin geslaagd is om de leerlingen de doelen te laten bereiken die verder reiken dan de eindterm. Hiermee bedoelen we dat de lessenreeks erin geslaagd is om de leerlingen een aanzet of eyeopener te bieden naar meer gevorderde onderwerpen zoals isomorfismen, eindige groepen van matrices, symmetriegroepen, permutatiegroepen en deelgroepen. In de lessenreeks werd er hoofdzakelijk gewerkt met algebraïsche voorbeelden van groepen. Symmetriegroepen werden in het vierde lesblok wel aangehaald, maar het hoofddoel hierbij was eerder om in te zien dat deze symmetriegroepen op een algebraïsche manier hertaald kunnen worden naar eindige groepen van matrices via een isomorfisme of naar permutatiegroepen.

Toetsresultaten als graadmeter

Ten eerste kunnen we een blik werpen op de toetsresultaten. In de toets werd er naast de eerder vernoemde vragen die rechtstreeks in verband staan met de eindterm ook gepeild naar het inzicht van de leerlingen in de diepgaandere onderwerpen van de lessenreeks, zoals de werking van isomorfismen, deelgroepen en de onderlinge algebraïsche samenhang tussen de symmetriegroepen, eindige groepen van matrices en permutatiegroepen. Bij de toets kunnen vraag 1a, 1b en 1c rechtstreeks gelinkt worden aan de eindterm en de overige vragen staan meer in verband met de verdere doelen van de lessenreeks. Er geldt dus dat het grootste deel van de punten op de toets te verdienen valt bij vragen die rechtstreeks peilen naar de doelen van de lessenreeks die verder gaan dan de eindterm. We kunnen dit ook nog verder nuanceren door te stellen dat de toetsvragen natuurlijk nooit een volledige één-op-éénrelatie hebben met de volledige set aan doelstellingen. De exacte formulering van de toetsvragen kan u achteraan terugvinden in bijlage 9.6. De resultaten van de leerlingen uit klasgroepen A en B zijn ook terug te vinden in bijlage 9.7.

Wanneer we een globaal beeld vormen van de behaalde resultaten van de leerlingen op onze toets, dan zien we dat de leerlingen uit klasgroep A een gemiddelde van 17.89 op 22 behalen, wat overeenkomt met ongeveer 81 percent. De mediaan ligt met 18.5 op 22 zelfs nog hoger. De punten liggen in deze klasgroep ook vrij kort bij elkaar: de leerling met de laagste score behaalde 14.5 op 22 terwijl de leerling met de hoogste score 19 punten op 22 behaalde. In klasgroep B heerst er een soortgelijk beeld. Het gemiddelde ligt hier op 16,15 op 22, wat overeenkomt met ongeveer 73 percent. De mediaan ligt hier met 17.5 ook iets hoger dan het gemiddelde. De spreiding tussen de resultaten is bij klasgroep B wel iets meer uitgesproken. De extrema liggen in deze klasgroep tussen op respectievelijk 12 en 20 op 22. Bij klasgroep C zijn er geen deelresultaten beschikbaar, maar de leerkracht gaf tijdens het interview aan dat de resultaten bij klasgroep C vrij dicht bij elkaar lagen rond een gemiddelde van om en bij de 13 op 22, waarbij 8.5 en 16.5 op 22 de grootste uitschieters qua score waren.

De vraag waarop de leerlingen in het algemeen het slechtst scoorden was de laatste vraag, waar aan de leerlingen gevraagd wordt om zelf een deelgroep te zoeken van de gehele getallen met de optelling. Slechts enkele leerlingen konden deze vraag volledig correct oplossen. Dit was op voorhand ook te verwachten. Deze vraag vergt een diep inzicht van de leerlingen in de werking van deelgroepen en vraagt ook een flinke dosis creativiteit. Tijdens de lessenreeks werden deelgroepen immers enkel gezocht binnen een context van Cayley-tabellen, terwijl de leerlingen in deze vraag op zoek moesten gaan naar een deelgroep van een oneindige groep. We hadden op voorhand verwacht dat deze vraag de grootste moeilijkheden bij de leerlingen zou veroorzaken.

De globale resultaten uit de toets geven op zich dus een vrij positief beeld van de inzichten van de leerlingen in de verdere onderwerpen van de lessenreeks die dieper gaan dan in de eindterm beschreven staat. In twee van de drie klasgroepen slaagt elke leerling voor de toets, wat zeker al als een positief element aanzien kan worden. Ook liggen de gemiddelden bij deze klasgroepen vrij hoog, wat iets minder het geval is bij de leerlingen van klasgroep C.

Isomorfismen versus werken binnen een groep

Uit de ervaringen die ik zelf tijdens de lessenreeks had en de ervaringen van de andere leerkrachten viel er op dat er een redelijk groot verschil in inzicht aanwezig is bij de leerlingen tussen de verschillende diepgaandere onderwerpen van de lessenreeks. We kunnen de behandelde onderwerpen hierbij grosso modo opsplitsen in de categorieën ‘werken binnen een groep’ en ‘isomorfismen’. Het samenstellen van symmetrieën, het vervolledigen van de Cayleytabel van de eindige groep van matrices G_4, \cdot en het samenstellen van permutaties kunnen we hierbij bijvoorbeeld classificeren onder de noemer ‘werken binnen een groep’. Merk hierbij op dat de eindterm ook onder het puntje procedurele kennis verwacht dat de leerlingen kunnen ‘rekenen in een groep’, maar binnen deze paragraaf bedoelen we met ‘werken binnen een groep’ het rekenen binnen de meer gevorderde contexten die verder gaan dan in de eindterm, zoals permutaties en gevorderde symmetrieën. Om deze tegenstelling tot dit puntje in de eindterm duidelijk te maken zullen we vanaf nu in deze paragraaf steeds spreken over ‘werken binnen een groep’. In klasgroepen A en B merkten de leerkrachten op dat de leerlingen sneller weg waren met isomorfismen en dat de grootste moeilijkheden blijven voorkomen bij het werken binnen een groep. Bij klasgroep C daarentegen merkt de leerkracht exact het tegenovergestelde op.

Na lesblokken 3 en 4, waarin respectievelijk het begrip isomorfisme aangebracht wordt en het isomorfisme tussen de symmetriegroep en de eindige groep van matrices onderzocht worden, merkt leerkracht B het volgende op in het logboek:

[Na lesblok 3:] Over het algemeen verliep de les vlot. Ik denk dat het werken met voorbeelden voor abstrahering hier de oorzaak voor is. Ook het feit dat ik isomorfisme heb aangebracht vanuit het concrete voorbeeld heeft hier vermoedelijk bij geholpen. Door gerichte vragen ontdekten leerlingen dat ze een één-éénduidig verband nodig hebben tussen de verschillende verzamelingen, en dat de bewerkingen moeten ‘overeenkomen’. Het gebruik van verschillende kleuren voor de verschillende bewerkingen was een opstap naar de verschillende bewerkingen uit de definitie.
Leerkracht B in het logboek

[Na lesblok 4:] Het isomorfisme tussen $G_4, *$ en D_4, \circ werd vlot ontdekt. Ik was vooral verbaasd dat ze zelf op het idee kwamen om te werken met een matrixvermenigvuldiging en coördinaten (en dus ook een assenstelsel) om het verband tussen matrix en overeenkomstige transformatie in de Cayleytabel te onderzoeken
Leerkracht B in het logboek

Deze leerkracht merkt dus op dat de leerlingen goed mee zijn met het begrip isomorfisme. Ook wanneer er in de volgende lessen gewerkt wordt rond isomorfismen duidt deze leerkracht aan dat het isomorfisme vlot gevonden wordt door de leerlingen. Dit komt overeen met de ervaring die ik zelf had in klasgroep A. Door te werken met de inkleuringen van de Cayleytabellen hadden de leerlingen snel door dat de inwendige werking van deze groepen in se hetzelfde is. Over het ‘werken binnen een groep’ merkt leerkracht B het volgende op in het logboek:

[Na lesblok 5:] Moeilijkheden: Een aantal leerlingen had veel moeite met het samenstellen van permutaties. Ik heb hierbij meer begeleiding gegeven dan ik vooraf had verwacht.
Leerkracht B in het logboek

[Na lesblok 4:] Tijdens het bekijken van het filmpje begrepen een aantal leerlingen de samenstelling van twee transformaties niet – ik denk niet dat je dat terugziet in de opname. Ik had dat vooraf een beetje verwacht. Ik heb dat opgelost door hoekpunt per hoekpunt te kijken waar dat uiteindelijk terechtkomt. Zo werd de samengestelde transformatie voor iedereen duidelijk.
Leerkracht B in het logboek

In het interview verduidelijkte leerkracht B zijn visie over deze moeilijkheden. Volgens hem leken de leerlingen blijkbaar vaak niet goed te weten wat ze moesten doen bij het vormen van samenstellingen van symmetrieën en permutaties. Hij duidt hierbij aan dat er een mogelijke verwarring bij de leerlingen ontstaan was bij permutaties door middel van de matrixnotatie die ingevoerd werd voor de permutaties in het laatste lesblok. Bij de samenstelling van permutaties wilden de leerlingen een tastbare operatie gaan uitvoeren op deze matrixvoorstellingen van de permutaties, zoals optellen of vermenigvuldigen, wat niet de bedoeling was.

Ikzelf had in klasgroep A gelijkaardige ervaringen met deze moeilijkheden rond het werken binnen een groep. Voor de samenstellingen van symmetrieën heb ik eerst het filmpje uit de presentatie gevolgd, maar de leerlingen gaven op dat moment zelf aan dat ze het nog niet goed begrepen hadden. Dit heb ik opgelost door zelf aan het bord nog enkele voorbeelden voor te doen. Ook bij het samenstellen van permutaties was het in de klas merkbaar dat de leerlingen nog wat twijfelden wanneer ze antwoordden op de vraag wat ze uitkwamen voor de samenstellingen van de gegeven permutaties. Merk op dat dit ook enigszins te verwachten was door de opbouw van de lessenreeks. Zoals eerder al is aangehaald hebben we de lessenreeks niet ontwikkeld met als doel om symmetriegroepen of permutatiegroepen op zich als de hoofdonderwerpen van de lessenreeks te bekijken, maar met de bedoeling dat deze enkel in dienst staan om het bredere concept groep en de (algebraïsch getinte) overeenkomsten tussen de verschillende groepen aan de man te brengen. Eigenlijk was door de keuze te leggen bij de algebraïsche blik op de lessenreeks en de focus te leggen op het bredere groepsconcept en het isomorfismeconcept deze voorkeur voor isomorfismen ten voordele van werken binnen een groep dus al ingecalculeerd. Het was daarnaast ook opmerkelijk dat binnen klasgroep A even moeilijkheden ontstonden in verband met het vermenigvuldigen van matrices bij het invullen van de Cayleytabel van de groep $G_4, *$. Sommige leerlingen wisten blijkbaar niet goed meer hoe je met de hand een matrixvermenigvuldiging moest uitvoeren. Nadat dit aan het bord snel werd herhaald was deze moeilijkheid grotendeels opgelost. Over dit aspect van ‘werken binnen een groep’ werd er in de andere klasgroepen niets opgemerkt en was dit waarschijnlijk niet of in mindere mate het geval.

Het is dus opvallend dat leerkracht C exact het tegenovergestelde heeft opgemerkt tijdens de uitvoering van de lessenreeks in klasgroep C. Zij schat het inzicht van de leerlingen uit deze klasgroep in verband met het begrip isomorfisme als volgt in, waaruit blijkt dat zij vermoedt dat de leerlingen uit haar klasgroep niet echt mee zijn met de diepere betekenis van het begrip isomorfismen:

“Die isomorfismen, ze hebben dat wel door want op de toets zijn er daar een heel aantal die echt wel heel mooi kunnen uitleggen wat dat een isomorfisme is, maar ik denk dat die niet echt weten wat er daarmee bedoeld wordt. Of dat ze nu echt doorhebben wat dat een isomorfisme is, dat weet ik niet. He, ze kunnen die definitie toepassen en ze weten van dat en dat hebben we nodig om een isomorfisme te hebben, maar of dat ze nu écht weten wat dat het is, ik geloof dat niet. [...] Maar, moet dat? Allez dat is een kennismaking ook he met isomorfismen, het is niet dat dat echt een gevorderde cursus is he.”

Leerkracht C in het interview

In het logboek geeft leerkracht C ook aan dat ze de leerlingen langer heeft laten werken aan de gedeelten die we kunnen classificeren onder de noemer ‘werken binnen een groep’. In deze klasgroep hebben de leerlingen dit bijvoorbeeld meer ingeoeft door wel de volledige Cayleytabellen van de eindige groepen van matrices op te stellen, terwijl in de andere klasgroepen dit gedeelte sneller werd afgebroken en ‘doorgespoeld’ nadat de leerlingen een voldoende aantal bewerkingen hadden uitgevoerd. Vermoedelijk is dit opvallende verschil binnen de klasgroepen dus minstens deels te wijten aan de specifieke werkwijze binnen de klassen en de manieren waarop de leerkrachten de instructies op de presentaties hebben geïnterpreteerd en geïmplementeerd in hun klassen.

Wanneer we deze bemerkingen van de leerkrachten naast de antwoorden van de leerlingen in de leerlingeninterviews leggen, dan zien we dat de opdelingen tussen klasgroepen A en B enerzijds en klasgroep C anderzijds ook gemaakt kan worden bij de antwoorden van de leerlingen. De sterke leerling uit klasgroep A

geeft aan dat hij geen specifieke moeilijkheden had met het begrip isomorfisme, noch met het werken binnen een groep, maar de minder sterke leerling uit klasgroep A haalt zelf het samenstellen van symmetrieën aan als het punt wat hij conceptueel het moeilijkste vond van de hele lessenreeks. Een gelijkaardige respons zien we bij de geïnterviewde leerlingen van klasgroep B. Tijdens het interview laat de door de leerkracht als voortrekker aangeduide leerling blijken dat hij inzicht heeft in de achterliggende werking en bedoeling van het concept isomorfisme. Hij antwoordt het volgende op de vraag wat hij het interessantste gedeelte van de lessenreeks vond:

“Euhm, ja zo het idee van iets kunnen bewijzen voor de ene groep, en dat wanneer dat ge te maken hebt met een isomorfe groep, dat ge dan eigenlijk die zaken dat ge bewezen hebt gewoon kunt overdragen en toepassen op die isomorfe groepen. Dat vond ik wel heel interessant dat dat iets was wat dat we konden doen. Daar had ik eerder nooit echt bij stilgestaan, dat dat iets was wat mogelijk was.”

Leerling 1 uit klasgroep B in het interview

Bij de leerlingen uit klasgroep C komt er uit het interview naar voren dat ze allebei vonden dat isomorfismen moeilijker te begrijpen waren dan het werken binnen een groep. De als sterkste aangeduide leerling zegt in het interview hierover het volgende:

Leerling: “Ik vond die isomorfismen moeilijker.

BV: “En waarom vind je die isomorfismen moeilijker?”

Leerling: “Ja, da’s euhm. Ja omdat ge, als ge bijvoorbeeld een groep hebt met veel elementen, dan moet ge al van veel elementen gaan zien of dat overeenkomt. ”

Leerling 1 uit klasgroep C in het interview

In deze redenering blijft deze leerling dus ook hangen op het oppervlakkige niveau van isomorfismen, namelijk hoe ga je een isomorfisme zoeken tussen twee verschillende groepen, en dat kan inderdaad moeilijker worden wanneer er een groot aantal verschillende elementen in een groep is. In tegenstelling tot de leerling uit klasgroep B laat deze leerling in zijn antwoord dus niet zien dat hij een dieper inzicht verworven heeft in de werking en het nut van het begrip isomorfisme.

6.2.3 Conclusie tweede onderzoeksvraag

Wanneer we terugkijken op de formulering van de tweede onderzoeksvraag dan zien we dat deze in twee delen uiteenvalt. Op het gedeelte dat vraagt of de lessenreeks, die hoofdzakelijk gebaseerd is op algebraïsche voorbeelden, erin slaagt om de leerlingen te laten voldoen aan de nieuwe specifieke eindterm, kunnen we volmondig ja antwoorden. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de zeer gunstige toetsresultaten van de leerlingen op de toetsvragen die rechtstreeks de onderdelen van de eindterm bevragen en uit de reacties van de leerkrachten die de lessenreeks uitgetest hebben in de verschillende klasgroepen. Wanneer de lessenreeks naast de formulering van de eindterm gelegd wordt, dan zien we dat de eindterm eigenlijk al volledig behandeld wordt in de eerste twee lesblokken. De leerkrachten beamen ook dat zij de leerlingen na de eerste twee lesblokken reeds in staat zien om te voldoen aan de eindterm.

Wanneer we het tweede gedeelte van de onderzoeksvraag bekijken dan kunnen we nog steeds instemmend antwoorden op de vraag of de lessenreeks erin slaagt om de leerlingen enig niveau mee te geven op het vlak van de onderwerpen waar de lessenreeks dieper gaat dan de eindterm, zij het op een voorzichtigere wijze. De vrij goede toetsresultaten stellen ons hoopvol, maar de leerkrachten hebben soms hun twijfels over het uiteindelijke niveau van de leerlingen bij deze diepgaandere onderwerpen. In twee van de drie klasgroepen komt er naar boven dat de leerlingen wel goed mee zijn met het isomorfismeconcept, maar dat het werken binnen een groep wat moeilijker gaat. Dit was enigszins te verwachten aangezien de lessenreeks de algebraïsche achtergrond, het brede begrip van groepen en het isomorfismeconcept centraal stelt ten koste van een diepe uitwerking van specifieke voorbeelden van groepen zoals symmetriegroepen en permutatiegroepen. Opvallend is dat één leerkracht het tegenovergestelde opmerkt in haar klasgroep. Dit is waarschijnlijk te

verklaren door het feit dat zij in de praktische uitwerking van de lessenreeks in de klas meer specifieke aandacht gegeven heeft aan werken binnen een groep in vergelijking met de andere klasgroepen.

Het is ook wel belangrijk om te vermelden dat de lessenreeks nu uitgetest is bij leerlingen die aan de sterke kant zitten van het leerlingenspectrum dat de nieuwe eindterm als uiteindelijke doelpubliek heeft. Wanneer deze lessenreeks gegeven zal worden bij klassen die ook moeten voldoen aan de eindterm maar uit minder sterke leerlingen bestaan, dan zal het te verwachten zijn dat de lessenreeks minder vlot zal verlopen en dat de moeilijkheden die de leerlingen dan zullen ondervinden met het werken binnen een groep en met het isomorfismeconcept nog uitgesprokener zullen zijn dan nu het geval was.

6.3 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 3

In de derde onderzoeksvraag bekeken we onze lessenreeks specifiek als een eerste inleiding die de leerlingen krijgen op een onderwerp dat afkomstig is uit de zuivere en abstracte wiskunde. In vergelijking met de wiskunde die de leerlingen uit het testpubliek in hun standaardpakket wiskunde krijgen is groepentheorie van een andere en meer zuiver wiskundige aard. In de derde onderzoeksvraag willen we nagaan of de lessenreeks erin slaagt om deze abstracte en zuivere kant van de wiskunde succesvol voor te stellen aan de leerlingen die het doelpubliek zijn van de nieuwe specifieke eindterm. We willen hierbij ook nagaan welk effect dit heeft op de verschillende leerlingen uit ons testpubliek. De volledige verwoording van de derde onderzoeksvraag vindt u terug in onderstaande kader:

Onderzoeksvraag 3

Slaagt deze lessenreeks erin om de leerlingen te laten kennismaken met een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde en welk effect heeft dit op de leerlingen?

We bekijken eerst de reacties van de leerkrachten uit de logboeken en interviews die gekoppeld kunnen worden aan deze onderzoeksvraag. Hierbij maken we een opsplitsing door te kijken naar het abstractie- en zuiverheidsgedeelte dat besproken wordt in de onderzoeksvraag enerzijds en naar de daarbijhorende effecten die zij opgemerkt hebben bij hun leerlingen. Vervolgens vergelijken we dit met de antwoorden die de leerlingen hebben gegeven tijdens de leerlingeninterviews.

6.3.1 De leerkrachten over de abstractie en zuiverheid van de lessenreeks

We kunnen eerst een blik werpen op de visie op de abstractie en de zuiverheid van de lessenreeks die de aan het onderzoek deelnemende leerkrachten laten blijken in de logboeken en de interviews. Bij de interviews werd er aan elke leerkracht expliciet gevraagd wat hij of zij vond van het abstractieniveau van de lessenreeks. Leerkracht C antwoordde op deze vraag met de volgende bewoordingen:

“Nu, ik vond niet dat het te abstract of te moeilijk was voor een vijfde jaar. Bij sommige dingen, ..., sommige leerstof vind ik wel te moeilijk voor een vijfde jaar, maar dit [deze lessenreeks] vind ik zeker niet te moeilijk voor een vijfde jaar. En daar zijn ook nog wel euhm, zoals die complexe getallen, die hadden ze nog niet gezien, maar ik had alleen maar nodig dat i kwadraat gelijk was aan -1 om verder te kunnen. En er waren nog wel dingen die we zo konden linken. Ze hadden nog maar pas matrices gezien, die associativiteit en die commutativiteit en zo. Ik vond dat nu wel mooi aansluiten bij de leerstof van het vijfde jaar ook.”

Leerkracht C in het interview

Ook leerkracht B geeft in het interview aan dat hij vindt dat het abstractieniveau van de lessenreeks achteraf gezien wel meevalt. De leerlingen kunnen volgens hem het abstractieniveau en de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks aan. Hij haalt hierbij aan dat de grootste moeilijkheden die hij heeft opgemerkt doorheen de lessenreeks ook helemaal niet te wijten zijn aan het (vrij hoge) abstractieniveau, maar eerder gelinkt kunnen worden aan de meer tastbare delen van de lessenreeks zoals het samenstellen van symmetrieën en

permutaties bijvoorbeeld. Persoonlijk deel ik de mening van deze twee leerkrachten in verband met het abstractieniveau van de lessenreeks. In klasgroep A heb ik nooit opgemerkt dat de leerlingen iets helemaal niet begrepen of het abstractieniveau niet aankonden.

6.3.2 De leerkrachten over het effect van de abstractie van de lessenreeks op de leerlingen

Leerkracht C maakt over het abstractieniveau van de lessenreeks in het interview wel een nuancering in verband met het testpubliek waarbij de lessenreeks nu is uitgetest:

“Ik heb alleen maar ASO-leerlingen he, echte ASO-leerlingen, wetenschappen-wiskunde, Latijn-wiskunde. En ik vond: voor die leerlingen is dat geen probleem. [...] Maar een industriële wetenschappen, dat zijn praktischere mannen denk ik he, dus gewoon het woordje groepentheorie, ik weet het niet hoe dat die dat onthalen, geen idee.”

Leerkracht C in het interview

Door deze quote wordt het debat geopend naar de vraag of er in deze lessenreeks nood is aan praktischere gerichte gedeeltes, die in het ontwerp van de lessenreeks zoals het er nu staat grotendeels afwezig zijn. Het gaat hierbij dan zowel over meer oefenstof die aansluit bij de onderwerpen van de lessenreeks zoals deze er nu staat als over meer concrete toepassingen waar groepentheorie aan bod komt in andere tastbare contexten die niet in de lessenreeks behandeld worden. In het interview vermeldt leerkracht B dat het geen probleem gaat zijn om leerlingen uit een richting industriële wetenschappen aan de eindterm te laten voldoen, maar ook hij duidt aan dat de leerlingen uit deze richting nood hebben aan directe praktische toepassingen bij de theorie. Dit ligt volgens hem bij groepentheorie minder voor de hand. Misschien is er in dit licht een uitstap naar versleutelingsalgoritmen en cryptografie mogelijk, maar ook deze onderwerpen zijn waarschijnlijk niet concreet genoeg voor dat leerlingenpubliek.

Leerkracht B bij merkt bij sommige leerlingen ook expliciet de nood op om even weg te gaan van de abstractie en meer toe te werken naar meer praktische onderwerpen. Sommige leerlingen lijken na verloop van tijd echt te hunkeren naar een meer praktische benadering. Deze nood aan een meer praktische ingesteldheid zet zich door bij de leerlingen doorheen de lessenreeks, zoals blijkt uit de onderstaande reacties van leerkracht B in het logboek:

[Na lesblok 3, waarin isomorfismen tussen eindige groepen worden aangebracht:] De meningen zijn verdeeld, blijkt uit een kort gesprek dat ik na de les hield met hen. Een aantal leerlingen vindt het nu duidelijker omdat het concreter wordt en is daardoor enthousiaster. Andere leerlingen stellen zich de vraag waar dit toe leidt en wat voor nut dit eigenlijk heeft. Zij zijn vooral geïnteresseerd in praktische toepassingen.

Leerkracht B in het logboek

[Na lesblok 4, waarin symmetrieën en het isomorfisme tussen een symmetriegroep en een eindige groep van matrices worden behandeld:] Na de les bleven alle leerlingen even langer om de les te bespreken. Dit zijn hun opmerkingen: Ze vonden deze les interessanter dan de vorige, ze hadden deze keer het gevoel dat ze naar iets concreets aan het zoeken waren en daar mee aan de slag konden.

Leerkracht B in het logboek

[Na lesblok 5, waarin permutatiegroepen en deelgroepen centraal staan:] Qua interesse zijn de meningen over de laatste les verdeeld. Een aantal leerlingen zijn groepentheorie beu, zij hebben vanaf het begin er al moeite mee gehad en kunnen de meerwaarde van deze abstracte aanpak niet appreciëren. Andere leerlingen zijn eerder neutraal en vinden de laatste les echt wel een meerwaarde als synthese van het geheel. Enkele leerlingen zijn heel enthousiast over de leerstof en zien er de schoonheid van in. Een van hen gaat volgend jaar wiskunde studeren, een andere mogelijk ook.

Leerkracht B in het logboek

In klasgroep B zijn er dus een aantal leerlingen die duidelijk geen fan zijn van de abstracte aanpak van de lessenreeks, hoewel de leerkracht in het interview wel aangeeft dat ook deze leerlingen het abstractieniveau op zich wel aankunnen. Deze leerkracht verklaart deze schijnbare tegenstelling in het interview door aan te halen dat deze leerlingen de les en het abstractieniveau wel meevolgen, maar duidelijk minder geïnteresseerd zijn. Ook in klasgroep A heb ik gemerkt dat er een paar leerlingen zijn die inhoudelijk wel goed mee zijn met de lessenreeks, maar qua enthousiasme helemaal niet warm blijken te worden van de abstracte aanpak. Dit is volgens leerkracht B niet volledig afhankelijk van het niveau dat deze meer wiskundig praktisch ingestelde leerlingen hebben. Leerkracht B geeft hierbij het voorbeeld van een leerling uit zijn klasgroep die de ambitie heeft om de opleiding geneeskunde aan te vatten. Deze leerling is goed in wiskunde en in de lessenreeks groepentheorie, maar er is af te lezen dat deze leerling helemaal niet begeistert wordt door het onderwerp en de gebruikte abstracte visie.

Aan de andere kant geeft leerkracht B in de bovenstaande citaten uit het logboek aan dat er leerlingen zijn die juist wel een grote fan blijken te zijn van de abstracte aanpak in de lessenreeks. Op het vlak van interesse merkt de leerkracht dus op dat er grote verschillen groeien tussen de verschillende leerlingen doorheen de lessenreeks groepentheorie. Tijdens het interview geeft deze leerkracht ook aan dat dit verschil in interesse tussen de leerlingen tijdens deze lessenreeks duidelijk groter is als hij dit vergelijkt met een lessenreeks die meer toegepast of praktischer ingesteld is. Leerkracht C heeft tijdens de lessenreeks in haar klasgroep een soortgelijke tendens opgemerkt. Zij zegt het volgende hierover:

“Ja, dat merkt ge ook wel he. [...] Ja dat is er zeker, maar bij mij waren er een aantal leerlingen, die bollebozen, en dat is er niet maar een of twee dat zijn er wel een paar, die echt wel geïnteresseerd bleven en die mee bleven nadenken en zo, maar inderdaad, ge laat er wel een paar achter. Ja, maar dat is altijd wel zo denk ik he. Maar in het begin, die eerste lesblokken, niet he. In het begin was dat verrassend dat iedereen echt goed mee was, dat vond ik wel knap om te zien. [...] Ik had in het begin echt wel iedereen mee, maar inderdaad op de duur, er is een verschil op de duur he, er zijn er die een beetje afhaken.”

Leerkracht C in het interview

Leerkracht C merkt dus op dat er een gedeelte van de leerlingen uit haar klasgroep was dat afhaakte, en dat deze trend vooral duidelijk werd in het tweede gedeelte van de lessenreeks. Ook in de logboekantwoorden van leerkracht B wordt duidelijk dat de vraag naar meer toepassingen en een meer praktische aanpak vooral naar boven kwam tijdens het tweede gedeelte van de lessenreeks. Verrassend hierbij is dat leerkracht B na lesblok vier, waarin de symmetrieën en hun samenhang met de eindige groep van matrices bestudeerd worden, opmerkt dat de leerlingen dit vierde lesblok interessanter vonden dan de vorige lesblokken, zoals naar voren komt in het citaat uit het logboek van deze leerkracht op de vorige pagina. In dit lesblok kregen de leerlingen volgens leerkracht B meer het gevoel dat ze naar iets concreets aan het zoeken waren en dat ze ermee aan de slag konden gaan. Ook in klasgroep A heb ik opgemerkt dat de leerlingen die voordien minder geïnteresseerd leken te zijn een heropleving kenden. Volgens mij kan dit verklaard worden door het feit dat het vierde lesblok een groter ‘hands-on-karakter’ heeft in vergelijking met de andere lesblokken.

Wanneer we inzoomen op de leerlingen voor wie de abstracte aanpak en de zuiverheid meer in hun kraam past, dan zien we dat dit hoofdzakelijk de leerlingen zijn die door de leerkrachten aangeduid worden als de sterkere leerlingen uit de klasgroep. In klasgroepen A en B is er daarnaast volgens de leerkrachten een gelijkwaardige tendens aanwezig, waarbij de abstractieliefhebbers tussen de leerlingen zichzelf het meeste kenbaar maken en het meest enthousiast reageren tijdens het vierde lesblok, en dan vooral in het meest abstracte gedeelte van het vierde lesblok waarbij er gezocht wordt naar de overeenkomsten tussen de symmetriegroep D_4, \circ en de eindige groep van matrices G_4, \cdot . Aantekeningen uit de field notes uit klasgroep A die dit enthousiasme van deze specifieke leerlingen onderstrepen zijn de volgende uitspraken, die gedaan werden door twee verschillende (sterkere) leerlingen:

“How wacht, dat [de structuur van de Cayleytabel] is hetzelfde, die symmetrieën werken hetzelfde als die matrices, hoe cool is dees.”, en “Amal zeg, ge kunt dat ook gewoon berekenen om dat te

zien, dat had ik niet verwacht.”

Uitspraken van leerlingen uit klasgroep A opgetekend in de field notes

Leerkracht B merkt in het logboek op dat de sterkere leerlingen in zijn klasgroep over de gehele lessenreeks heen bekeken ook het meest enthousiast reageerden tijdens dit gedeelte van het vierde lesblok. Het volgende gedeelte uit het logboek van deze leerkracht na lesblok vier illustreert dit:

Ik vond (bepaalde) leerlingen soms erg enthousiast. Een leerling ontdekte het isomorfisme tussen G_4, \cdot en D_4, \circ en was daar erg enthousiast over. [...] Er is verbazend veel van hen gekomen. [...] Het isomorfisme tussen G_4, \cdot en D_4, \circ werd vlot ontdekt. Ik was vooral verbaasd dat ze zelf op het idee kwamen om te werken met een matrixvermenigvuldiging en coördinaten (en dus ook een assenstelsel) om het verband tussen matrix en overeenkomstige transformatie in de Cayleytabel te onderzoeken.

Leerkracht B in het logboek

In het interview herhaalt leerkracht B deze opmerking en geeft hij hierbij aan dat deze enthousiastere leerlingen op dit punt in het lesblok de minder enthousiaste leerlingen proberen mee te trekken. Leerkracht C daarentegen heeft in haar klasgroep niet opgemerkt dat de sterkere en meest geïnteresseerde leerlingen een enthousiasmepeik hebben in het vierde lesblok. In het interview legt zij dit als volgt uit:

“Awel, ik vond dat ook het interessantste [gedeelte van de lessenreeks]. Ik vond zo: daar kwamen al die dingen mooi samen, dus misschien was ik een beetje te enthousiast. Ik vond dat zo schoon, maar die hebben zo passief naar die video zitten kijken. He, die hebben dat niet zelf moeten zoeken. Ik denk dat het dan beter is als die dat zelf, want die zoeken zelf graag he, en dat was bij die vorige lessen wel meer. Maar ik moest dan die grote Cayleytabel [van G_4, \cdot] opschrijven, euhm, en daar waren ze niet echt in geïnteresseerd, want dat is zo wat bandwerk eigenlijk he. Dus ik was ze daar al een beetje kwijtgeraakt en dan gewoon dat passief naar een video zitten te kijken was blijkbaar ook niet echt hun ding. Dus ik was kei-enthousiast over die les, van nu kunnen we alles samenbrengen en die symmetrie dat is toch keimooi om te zien.”

Leerkracht C in het interview

Uit deze quote kunnen we afleiden dat het gebrek aan enthousiasme in klasgroep C op dit punt in de lessenreeks waarschijnlijk te verklaren valt aan de hand van de gebruikte werkvormen tijdens dit lesblok. In klasgroep C hebben de leerlingen de ganse (64 in te vullen vakjes tellende) Cayleytabel van de groep G_4, \cdot opgesteld, terwijl dit ‘bandwerk’ in de andere twee klasgroepen vroeger afgebroken werd om verder te gaan met de les. In deze twee klasgroepen werd er gekozen om de leerlingen slechts een gedeelte van de Cayleytabel te laten invullen om hen zo vertrouwd te laten worden met dit werk, zonder hier een groot gedeelte van de beschikbare tijd aan te verliezen. Ook zijn in klasgroepen A en B de symmetrieën van het vierkant op een meer interactieve wijze aangebracht, terwijl dit in klasgroep C puur aangebracht werd door te kijken naar het bijgeleverde filmpje. Waarschijnlijk heeft deze meer routineuze en minder activerende aanpak ervoor gezorgd dat het enthousiasme bij de leerlingen uit klasgroep C meer gefnuikt werd tijdens dit vierde lesblok in vergelijking met de leerlingen uit de andere twee klasgroepen.

6.3.3 De leerlingen over de abstractie en zuiverheid van de lessenreeks

We kunnen vervolgens de inschattingen die de leerkrachten maakten over de reacties van de leerlingen op de abstractie en de zuiverheid van de lessenreeks aftoetsen door middel van de leerlingeninterviews. Bij elke klasgroep werden twee verschillende leerlingen geïnterviewd waarbij telkens een leerling door de leerkracht aanzien werd als een sterkere leerling en de andere als een minder sterke leerling. Het algemene beeld dat de leerkrachten schetsten dat de wiskundig sterkere leerlingen de abstracte aanpak van de lessenreeks meer konden appreciëren, met de leerling die een studie geneeskunde ambieert als de spreekwoordelijke uitzondering die de regel bevestigt, en dat de minder sterke leerlingen liever een meer praktische en minder abstracte benadering hadden gehad kwam hier goed mee overeen. Een voorbeeld hiervan is terug te vinden

in het interview met de sterkere leerling uit klasgroep A. Op de vraag “Heeft deze lessenreeks je uit je comfortzone gehaald?”, antwoordde deze leerling als volgt:

Leerling: “Goh, ik werd uit mijn comfortzone gehaald, maar op een positieve manier vond ik. Want ja, ik denk dat we toen bezig waren met integralen of zo en dat is dan een hele les lang altijd oefeningen op hetzelfde en dan theorie, nog een beetje theorie, nog een beetje oefeningen. En ik denk dat nu, ja, zo ineens de overgang naar iets heel abstracters en de verschillende linken tussen wiskundige ideeën, dat dat iets is wat dat minder in de zes uren, ja veel minder eigenlijk in de zes uren wordt gedaan. En dat is eigenlijk ook waarom dat ik voor de acht uur zou kiezen, voor dat soort lessen.”

BV: “Je hebt zelf al het woord abstract aangehaald. Vond je dat het te abstract was?”

Leerling: “Nee, nee zeker niet, want er waren voldoende voorbeelden gegeven en er was een goede basis gegeven. En ik vind ook ja, dat alles aan elkaar gelinkt zou zijn dat is natuurlijk een abstract begrip. Maar om daarmee aan het werk te gaan, verschillende dingen dan beginnen te vergelijken en zo, ik vind dat heel tof.”

Leerling 1 uit klasgroep A tijdens het interview

Uit deze respons van de sterkere leerling uit klasgroep A kan er afgeleid worden dat deze leerling zeker geen probleem heeft ondervonden met de abstractiegraad van de lessenreeks. Hij geeft hierbij zelf aan dat hij dit juist als aangenaam aangevoeld heeft wanneer hij dit vergelijkt met de meer toegepaste onderwerpen uit het wiskundecurriculum zoals integralen. Voor mij als leerkracht leek deze leerling, zoals eerder aangegeven, het meest enthousiast tijdens het vierde lesblok, en dan meer bepaald tijdens het gedeelte waarbij de overeenkomst en het isomorfisme tussen de symmetriegroep en de eindige groep van matrices werd onderzocht. Dit komt ook expliciet in het antwoord van deze leerling naar voren. Ik neem immers aan dat de leerling met ‘de verschillende linken tussen wiskundige ideeën’, ‘dat alles aan elkaar gelinkt zou zijn’ en ‘verschillende dingen dan beginnen te vergelijken’ impliciet het isomorfismebegrip en meer bepaald het isomorfisme tussen symmetrieën en matrices (en permutaties) bedoelt.

Anderzijds kunnen we de opmerking die leerkracht B maakte dat hij zag dat er verschillende leerlingen waren die op interessevlak afhaakten en meer nood hadden aan praktische toepassingen duidelijk terugvinden in de reacties van de minder sterke leerlingen die geïnterviewd werden. Dit komt niet alleen naar voren bij de minder sterke leerling uit klasgroep B, maar ook een van de geïnterviewde leerlingen uit klasgroep C maakt tijdens het interview een opmerking hierover. Deze leerling zei tijdens het interview het volgende:

Leerling: “Het is nu niet dat ik dacht van daar wil ik wel een heel aantal lessen van volgen. Zo plezant vond ik het ook weer niet.”

BV: “Kan je jouw mening een beetje verduidelijken?”

Leerling: “Ja, omdat ik de wiskunde die wij nu krijgen op school, zes uur, die vind ik dan interessanter dan deze 2 uur [seminarieuren] dat ik heb gevolgd. Gewoon, dit was zo, niet echt helemaal berekeningen of zo maken, dat was meer werken met, beetje logisch nadenken en dan ook zo zien met al die cijfertjes dat dat klopt en dan helemaal uitwerken, en dat vind ik niet zo leuk.”

BV: “Dus je zou kunnen zeggen dat het nu meer conceptueel was?”

Leerling: “Ja, en er waren niet zo veel oefeningen he. Het was heel veel theorie, dus ik zou dat leuk vinden als er wat oefeningen bijkwamen. Dan kun je de theorie ook beter toepassen.”

Leerling 2 uit klasgroep C tijdens het interview

In deze reactie van de leerling uit klasgroep C geeft deze leerling dus expliciet aan dat ze graag meer praktische toepassingen en meer concreet oefenmateriaal had willen zien in deze lessenreeks. Dit komt dus overeen met het beeld dat de leerkrachten schetsten van dat de leerlingen die het minst geïnteresseerd waren graag een meer toegepaste aanpak hadden gezien in plaats van het meer abstracte uitgangspunt van de lessenreeks zoals nu het geval was.

Tot slot kunnen we nog even kijken naar de specifieke reacties van de leerlingen die met een wiskundige ambitie naar het hoger onderwijs trekken. Van de geïnterviewde leerling 1 uit klasgroep A is geweten dat hij komend academiejaar een studie informatica wil aanvatten en leerling 1 uit klasgroep B gaat komend academiejaar starten in de bacheloropleiding wiskunde. De geïnterviewde leerlingen uit klasgroep C uit het vijfde jaar gaven aan dat ze nog niet zo goed wisten wat ze na hun middelbareschoolcarrière zouden willen gaan studeren. Aan de leerlingen met de meer wiskundige ambities (we rekenen informatica hier ook bij) werd gevraagd of deze lessenreeks hun beeld van de wiskunde als wetenschap had veranderd en of deze lessenreeks hun studiekeuze eventueel mee heeft beïnvloed. De leerling uit klasgroep B antwoordde hierop het volgende:

“Ja ik ben van plan om volgend jaar wiskunde te gaan studeren. [...] Ja, ik denk dat dat ook wel een beetje de interesse verklaart die er bij mij wel is, sowieso. [...] Het [De lessenreeks] heeft mij zeker niet doen afschrikken van wiskunde, dus voor mij gaf dat gewoon weer een bevestiging van dat dat echt wel is wat ik wil doen volgend jaar.”

Leerling 1 uit klasgroep B tijdens het interview

Uit de reactie van deze leerling blijkt dat deze leerling in de (abstractere en zuivere) lessenreeks een bevestiging gevonden heeft voor zijn studiekeuze. Hij geeft daarbij expliciet aan dat deze lessenreeks hem zeker niet doen afschrikken heeft van wiskunde. Persoonlijk neem ik aan dat deze leerling hiermee de universitaire, abstracte en zuivere wiskunde bedoelt, in vergelijking met de wiskunde die hij nu krijgt in het secundair onderwijs. Als deze uitspraak zo geïnterpreteerd kan worden, dan betekent dit ook dat deze leerling zich door onze lessenreeks een beter beeld heeft kunnen vormen van (een van de kamers van) de abstracte en zuivere wiskunde en dat hij hierdoor zijn keuze voor wiskunde als studierichting bevestigd ziet. Een gelijkaardig antwoord zien we bij leerling 1 uit klasgroep A, die vermeldt dat zijn keuze voor informatica al lang vaststond maar zich onder andere door deze lessenreeks goed klaargestoomd voelt om deze studie aan te vatten.

6.3.4 Conclusie derde onderzoeksvraag

Als we onze lessenreeks in het geheel bekijken dan zien we dat de leerkrachten aanduiden dat het globale abstractieniveau van de lessenreeks haalbaar is, zeker voor de sterkere leerlingen waaruit ons testpubliek bestond. Leerkracht C haalt hierbij aan dat de lessenreeks, ook qua abstractieniveau, zelfs niet te moeilijk was voor een klasgroep uit het vijfde jaar. De lessenreeks slaagt er volgens hen dus in om op een begrijpelijke manier de leerlingen een beeld te geven van een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde. De leerlingen met een ambitie om in het hoger onderwijs een wiskundige of aan wiskunde gerelateerde studie aan te vatten gebruikten dit door de lessenreeks opgedane beeld van de abstracte en zuivere wiskunde zelfs om hun studiekeuze voor zichzelf te bevestigen.

Wanneer we kijken naar het effect dat de abstracte en zuivere kant van onze lessenreeks had op de leerlingen, dan zien we dat de leerkrachten opmerken dat de verschillen tussen de leerlingen tijdens deze lessenreeks groeien, zowel qua niveau als qua interesse. Er vormen zich verschillende meningen bij de leerlingen, waarbij doorgaans de sterkere leerlingen de abstracte aanpak van de lessenreeks kunnen smaken, terwijl doorgaans de minder sterke leerlingen aangeven dat ze meer nood hebben aan praktische toepassingen tijdens de lessenreeks. Dit kan zowel geïnterpreteerd worden als de nood aan meer concreet oefenmateriaal bij de aanwezige onderwerpen als de nood aan de bespreking van een meer concrete en tastbare toepassing van de groepentheorie binnen een ander domein. Er blijkt te gelden dat de leerlingen die de abstracte aanpak van de lessenreeks graag hebben het meest enthousiast reageren op de plaatsen in de lessenreeks waar er linken gelegd worden tussen verschillende onderwerpen, waarbij het gedeelte van het vierde lesblok waar de overeenkomsten tussen de symmetrieën en de matrices onderzocht worden het meest genoemde voorbeeld is. Deze opdeling qua enthousiasme en interesse vinden we ook terug bij de leerlingen in de interviews.

7 Discussie

In dit masterproefonderzoek hebben we een lessenreeks rond groepentheorie ontwikkeld en hebben we een kwalitatief verkennend onderzoek opgezet waarbij deze lessenreeks uitgetest werd in verschillende klasgroepen. Ten eerste trachtte onze lessenreeks om vanuit de visie van *guided reinvention* de leerlingen zelf de definitie van een groep te laten herontdekken. Daarbij combineerden we de werkwijze rond de intuïtieve exploratie van tegenovergestelden zoals voorgesteld door Leron en Ejersbo (2016) en de werkwijze rond het systematisch en formeel oplossen van vergelijkingen zoals aangebracht werd door Dorier (1995) en Wasserman (2014). Uit de resultaten van ons onderzoek bleek dat deze werkwijze effectief is om de leerlingen alle onderdelen uit de definitie van een groep te laten ontdekken, met de kanttekening dat sommige van de geïnterviewde leerlingen aangeven dat ze deze werkwijze eerder vaag vonden. Ten tweede konden we concluderen dat onze lessenreeks erin slaagt om de leerlingen te laten voldoen aan de vereisten uit de eindterm. Ook in verband met de doelen van de lessenreeks kunnen we voorzichtig positief zijn, al uiten de leerkrachten ook hun twijfels bij het uiteindelijke niveau van de leerlingen bij de meer diepgaandere onderwerpen van de lessenreeks. Tot slot zagen we dat de lessenreeks erin slaagt om op een begrijpelijke manier de leerlingen een beeld te geven van de groepentheorie als een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde. De leerkrachten geven hierbij aan dat de leerlingen het abstractieniveau van de lessenreeks aankunnen, maar er wordt aan de andere kant opgemerkt dat de lessenreeks in de hand werkt dat de verschillen tussen de leerlingen groter worden. Dit konden we in de leerlingeninterviews ook terugvinden, vooral op het vlak van de interesse en het enthousiasme van de leerlingen ten opzichte van deze kamer van de abstracte en zuivere wiskunde.

In dit hoofdstuk bespreken we nog enkele bijkomende overwegingen die we kunnen maken wanneer we terugblikken op de lessenreeks, het onderzoek en de resultaten. We werpen hierbij een blik naar hoe we de lessenreeks eventueel in de toekomst zouden kunnen aanpassen en welke suggesties voor volgend onderzoek er naar voren komen uit dit interventieonderzoek.

7.1 Verwarring tussen associativiteit en commutativiteit?

Ten eerste merken we de interessante verwarring tussen associativiteit en commutativiteit op die opdook tijdens het analyseren van de resultaten van ons interventieonderzoek. In alledrie de klasgroepen kwam deze verwarring immers naar voren. Deze verwarring blootleggen was op zich geen hoofddoel van ons onderzoek, maar we bekijken het graag als een interessante ‘bijvangst’. De verwarring tussen associativiteit en commutativiteit bij leerlingen in het secundair onderwijs werd eerder al uitvoerig onderzocht door Larsen (2010). Hij is de onderzoeker die de op een meetkundige blik geïnspireerde lokale instructietheorie ontwikkelde voor het aanbrengen van groepentheorie binnen de context van *guided reinvention*. Larsen (2010) onderzocht waar de oorsprong zou kunnen liggen van de verwarring tussen associativiteit en commutativiteit bij de leerlingen uit het secundair onderwijs. Hij vermeldt in zijn conclusies dat deze verwarring volgens hem te verklaren valt op basis van twee verschillende oorzaken, zoals duidelijk wordt in onderstaand citaat:

“Above I have argued that the three cases taken together suggest that difficulties with the associative and commutative properties may stem from 1) a tendency to think about expressions involving binary operations in terms of a sequential procedure and 2) a lack of preciseness in the informal language used in association with these properties.”

Bron: Larsen (2010, pg.42).

Volgens Larsen (2010) zijn er dus twee mogelijke oorzaken. Enerzijds zegt hij dat de verwarring mogelijk ontstaat omdat de leerlingen uitdrukkingen die binaire operaties bevatten te veel opvatten als een sequentiële procedure, waarbij de leerlingen vaak ook blijven hangen in een visie dat een rij aaneengeschakelde operaties van links naar rechts bekeken moet worden. Anderzijds haalt Larsen (2010) de mogelijkheid aan dat de verwarring tussen associativiteit kan ontstaan door middel van een gebrek aan precieze formuleringen in het informeel taalgebruik wanneer er over deze concepten gesproken wordt. Dit komt bijvoorbeeld naar voren in een formulering als “de volgorde maakt niet uit”, die zowel gebruikt kan worden om associativiteit als commutativiteit te beschrijven. Aan alle geïnterviewde leerlingen werd er gevraagd om te formuleren wat

de termen associativiteit en commutativiteit nu ook al weer betekenden, en één van de zes geïnterviewde leerlingen, namelijk leerling 1 uit klasgroep B, verklaarde de term associativiteit met de bewoordingen “De volgorde van de bewerkingen maakt dan niet uit.”. Deze tweede mogelijke verklaring zoals aangebracht door Larsen (2010) vinden we dus ook terug in de leerlingeninterviews, zij het in een zeer beperkte mate.

Wanneer we bekijken op welke manier de verwarring tussen associativiteit en commutativiteit naar voren kwam tijdens ons onderzoek, dan zien we dat de oorzaak van deze verwarring waarschijnlijk minder diep geworteld zit dan de manier waarop deze behandeld werd in het onderzoek van Larsen (2010). De leerlingen die tijdens ons onderzoek de twee termen door elkaar haalden, wisten vaak nog wel waar ze over aan het spreken waren en welke van de twee ze bedoelden, maar ze haalden gewoon de benamingen van deze twee concepten door elkaar. Dit zou bijvoorbeeld opgelost kunnen worden door de termen associativiteit en commutativiteit expliciet op een taalkundige manier te gaan ontleden in de klas. Commutativiteit zou hierbij dan gelinkt kunnen worden aan het engelstalige woord ‘commute’, wat verplaatsen betekent. Bij commutativiteit worden de elementen van plaats gewisseld en dus fysiek verplaatst bij het noteren, wat niet het geval is bij associativiteit. De term associativiteit zou aan de andere kant gelinkt kunnen worden aan het woord ‘associëren’ in de betekenis van ‘samennemen’. Bij associativiteit kan je immers beredeneren dat je de elementen op verschillende manieren mag ‘samennemen’ met haakjes.

Leerkracht B beschreef in het logboek het voorkomen in de praktijk van de verwarring tussen associativiteit en commutativiteit als volgt:

Ik heb twee denkfouten ontdekt: [...] Verder verwarden leerlingen associativiteit met commutativiteit. Hun redenering waarom een bepaalde bewerking associatief is, was fout. Ze gebruikten de symmetrie in de Cayleytabel ten opzichte van de hoofddiagonaal, en toonden dus eigenlijk commutativiteit aan.

Leerkracht B in het logboek

De leerlingen trachtten op dat punt in de les dus om de associativiteit van de bewerking af te lezen in de Cayleytabel en gebruikten daarvoor het argument dat de commutativiteit aantoont. Een groot pijnpunt hierbij is natuurlijk dat associativiteit quasi onmogelijk na te gaan of af te lezen is wanneer je alleen naar een Cayleytabel van een groep of een kandidaat-groep kijkt. Het is dan ook aannemelijk dat de leerlingen in zo een geval teruggrijpen naar iets dat ze wel kunnen nagaan met behulp van een Cayleytabel, zoals commutativiteit. Daarnaast is het ook belangrijk om te vermelden dat er in onze lessenreeks enkel voorbeelden van kandidaat-groepen die associatief zijn de revue gepasseerd zijn. Wanneer de leerlingen in de lessenreeks eventueel een Cayleytabel opgesteld hadden van een verzameling met een bewerking die niet associatief was, dan had deze verwarring op dat punt misschien vermeden kunnen worden. Een voorbeeld van zulk een verzameling met een bewerking die niet associatief is vinden we terug in Oosse (1969). In deze bron wordt er onder het mom van een specifieke context van de lengten van blokjes gewerkt met de verzameling van natuurlijke getallen van 0 tot en met 4. De bewerking die gebruikt wordt is de absolute waarde van het verschil, dus $x * y = |x - y|$. Het element 0 is hier het neutraal element en elk element is zijn eigen inverse. Wanneer er bijgevolg een Cayleytabel van deze kandidaat-groep opgesteld wordt dan lijkt het in de Cayleytabel alsof er aan alle controleerbare voorwaarden uit de definitie van een groep voldaan is. Dit is echter geen groep aangezien deze bewerking niet associatief is. Een tegenvoorbeeld is het volgende: $(3 * 2) * 1 = 0 \neq 2 = 3 * (2 * 1)$.

7.2 Op welke manieren de lessenreeks nog aanpassen: nood aan meer oefenstof

Het bovenstaande voorbeeld in verband met de automatische associativiteit van de voorbeelden van de kandidaat-groepen die we in onze lessenreeks hebben opgenomen duidt een eerste plaats aan waarop we de lessenreeks zouden kunnen aanpassen in het licht van de resultaten die uit dit onderzoek naar boven zijn gekomen. Een tweede opmerking die in deze lijn ligt kwam naar voren bij verschillende geïnterviewde leerlingen tijdens de interviews. Zij gaven aan dat zij tijdens de lessenreeks nood hadden aan meer oefenstof. We kunnen deze opmerking begrijpen. Op dit moment komen er wel oefeningen aan bod in de lessenreeks, maar deze worden allemaal tegelijkertijd door de leerlingen opgelost tijdens de les, waarna er meestal verdergegaan

wordt met meer theoretische stukken. Wanneer de leerlingen vervolgens de lessenreeks moeten studeren in de aanloop naar de afsluitende toets dan is er voor hen geen extra oefenmateriaal voorhanden, terwijl zij dit wel graag zouden hebben of daar zelfs op gehoopt hebben.

Deze bekommernis van de leerlingen en ook de opmerking van de leerkrachten dat de leerlingen bijvoorbeeld nog vaak moeilijkheden hebben met het samenstellen van permutaties en symmetrieën doet ons concluderen dat het naar de toekomst toe handig zou zijn als er bijvoorbeeld over deze onderwerpen nog meerdere oefeningen opgenomen worden in de lessenreeks. Daarnaast zouden leerlingen zeker ook baat hebben bij enkele extra oefeningen over de concepten die meer centraal stonden binnen de lessenreeks. Denk daarbij bijvoorbeeld aan vragen waarbij de leerlingen moeten nagaan of een kandidaat-groep voldoet aan alle elementen uit de definitie van een groep of vragen waarbij de leerlingen alle deelgroepen van een gegeven groep moeten zoeken. Indien de leerkracht merkt dat er in de klasgroep grote moeilijkheden zijn met deze onderwerpen dan kan ervoor gekozen worden om deze extra oefeningen te maken tijdens de lessenreeks en indien dit niet het geval is kunnen deze oefeningen dienen als herhalingsoefeningen die de leerlingen kunnen gebruiken tijdens het voorbereiden voor de toets.

7.3 Wat met de abstractie van de lessenreeks?

Hierbij aansluitend kunnen we ook terugblikken op de graad van abstractie van de lessenreeks zoals deze er nu staat. Tijdens de lessenreeks worden het concept van een groep, de verschillende voorbeelden van groepen en de overeenkomsten tussen deze verschillende voorbeelden van groepen in het algemeen op een vrij abstracte manier aangebracht en ingeoeffend. De leerkrachten geven echter aan dat het abstractieniveau van de lessenreeks haalbaar is voor het leerlingenpubliek uit de klasgroepen waar deze lessenreeks bij is uitgetest. Leerkracht B vermeldt in het logboek en in het interview dat een groot deel van zijn leerlingen tijdens het vierde lesblok het meest enthousiast en geïnteresseerd leken, vooral wanneer de isomorfismen besproken worden. In dit lesblok wordt de overeenkomst tussen een symmetriegroep en een eindige groep van matrices onderzocht. Hij zegt hierbij dat dit volgens hem te verklaren is door het feit dat de les daar voor de leerlingen tastbaarder wordt en een doel en een richting meekrijgt. De leerlingen lijken volgens de leerkrachten dus het best te reageren op de gedeeltes waar de lessenreeks van het pad van de zuivere abstractie afwijkt.

Bij de leerlingen zien we een soortgelijk beeld terugkomen. Op zich kunnen de leerlingen het abstractieniveau wel aan en voornamelijk de sterkere leerlingen vinden in de abstractie van deze lessenreeks een aanpak die hen begeestert. Aan de andere kant zijn er ook leerlingen die qua interesse afhaken tijdens de lessenreeks, waarbij de mate van abstractie zeker een rol speelt. Om deze leerlingen (langer) aan boord te houden tijdens de lessenreeks zou het dus interessant kunnen zijn om een meer praktische visie te hanteren tijdens de lessenreeks en eventueel een of meerdere grotere toepassingen van groepentheorie te behandelen tijdens de lessenreeks, wat nu niet echt het geval is. We kunnen hier ook de nuancering bij maken dat de specifieke eindterm die de aanleiding vormde voor het ontwikkelen van deze lessenreeks ook in voege zal treden voor een ruimere groep van leerlingen dan in ons interventieonderzoek. In die doelgroep zitten dus ook de meer praktisch ingestelde leerlingen uit de richting industriële wetenschappen bijvoorbeeld, en niet alleen de doorgaans sterkere leerlingen die voor de seminarieuren wiskunde kiezen zoals nu het geval was in ons testpubliek. Ons interventieonderzoek kan echter geen uitspraak doen over de vraag of het abstractieniveau van de lessenreeks te hoog gegrepen is of niet voor het bredere publiek die de eindterm beoogt. Deze leerlingen zullen alleszins zeker nog meer nood hebben aan en gebaat zijn bij een implementatie van een meer praktische toepassing binnen de lessenreeks.

Vervolgens kunnen we dan eens een kijkje nemen naar welke praktische toepassing eventueel ingepast zou kunnen worden in de lessenreeks. Het probleem hierbij is echter dat er niet veel tastbare praktische toepassingen van groepentheorie voorhanden zijn. Dit is zeker het geval als het dan nog om toepassingen moet gaan die begrijpelijk genoeg zijn voor een publiek uit het secundair onderwijs. De keuze voor cryptografie en versleutelingsalgoritmen ligt misschien nog wel het meest voor de hand, waarbij de link met modulorekenen en eindige groepen aangehaald kan worden. Leerkracht B geeft in het interview echter aan dat hij eraan

twijfelt dat dit ook praktisch en concreet genoeg zou zijn voor deze leerlingen. Ook ben ik persoonlijk van mening dat een vrij grondige bespreking van een praktische toepassing zoals cryptografie een ingrijpende aanpassing van de lessenreeks zou vragen die de aandacht van de lessenreeks (misschien te) veel in de richting van dit onderwerp zou trekken. Eigenlijk is dit dan meteen een lessenreeks op zich, zoals bijvoorbeeld is uitgewerkt binnen het Junior Collegeproject van de KU Leuven. De schoonheid van onze lessenreeks nu zit volgens onszelf en de deelnemende leerkracht hoofdzakelijk bij de bespreking van de isomorfismen tussen de symmetriegroep D_4 , \circ , de eindige groep van matrices G_4 , $*$ en de overeenkomstige permutatiegroep. Een grondige bespreking van een praktische toepassing zou het waarschijnlijk in de hand werken dat deze schoonheid van de lessenreeks zoals deze nu naar voren komt hierdoor ondergesneeuwd kan geraken.

7.4 Nood aan meer meetkunde in de lessenreeks?

Onze lessenreeks hebben we vormgegeven met een hoofdzakelijk algebraïsch perspectief. We hebben hierdoor gekozen om de aanloop naar de definitie van een groep niet te nemen vanuit een meetkundig uitgangspunt, maar door de inzichten uit het aanwezige wetenschappelijk onderzoek te combineren en te kiezen voor een weg waarin we werken met tegenovergestelden van alledaagse objecten, gekende getallenverzamelingen en het rigoureus oplossen van vergelijkingen. Ook in het vervolg van de lessenreeks hebben we hoofdzakelijk voorbeelden van groepen besproken die eerder algebraïsch getint zijn. In het vierde lesblok kwamen meer meetkundig gerichte symmetriegroepen wel aan bod, maar deze zijn inhoudelijk niet heel diepgaand uitgespit en hadden eerder als doel om de weg te openen naar een isomorfisme tussen deze meetkundige symmetriegroepen en de algebraïsche getinte eindige groepen van matrices en permutatiegroepen. Deze keuze voor een hoofdzakelijk algebraïsche aanpak was deels kunstmatig. Dit was het geval omdat Mathias Buckinx, een masterstudent uit de masteropleiding wiskunde aan de KU Leuven, voor zijn masterproefonderzoek ook een lessenreeks groepentheorie ontwikkeld heeft voor leerlingen uit de laatste jaren van het secundair onderwijs waarbij hij als opdracht meekreeg om wel een meer zuiver meetkundig uitgangspunt te hanteren. Dit komt bijvoorbeeld naar voren in de manier waarop in zijn lessenreeks toegewerkt wordt naar de definitie van een groep, die zeer sterk aanleunt bij de aanpak die ontwikkeld en gebruikt werd in de onderzoeken van Larsen (2009) en Larsen (2013).

De leerkrachten geven in de interviews aan dat ze de zuivere algebraïsche blik in de lessenreeks niet als storend hebben ervaren. Zij geven aan dat er volgens hen geen directe nood is aan meer meetkunde in de lessenreeks in vergelijking met de uitwerking van de lessenreeks zoals nu het geval is. Meetkunde en meetkundige voorbeelden zijn, zoals in paragraaf 4.5 besproken werd, essentiële onderdelen en fundamentele concepten binnen de groepentheorie, maar de beperkte bespreking van symmetrieën en symmetriegroepen in het vierde lesblok is volgens de leerkrachten voldoende om deze link tussen meetkunde en groepentheorie te gebruiken in een lessenreeks voor leerlingen uit het secundair onderwijs. Leerkracht B spreekt hierbij tijdens het interview ook zijn twijfels uit over de praktische uitwerking van de visie om vanuit een zuiver meetkundig standpunt toe te werken naar de definitie van een groep. In de praktijk zal dit volgens hem dan waarschijnlijk gebeuren door de leerlingen zelf te laten experimenteren met de symmetrieën van een meetkundig object en de samenstellingen van deze symmetrieën, wat inderdaad overeenkomt met de aanpak gehanteerd door Larsen (2009) en Larsen (2013). In klasgroep B kwam er volgens de leerkracht echter naar voren dat het samenstellen van zulke symmetrieën een grote moeilijkheid was voor zijn leerlingen. Deze moeilijkheid staat volgens deze leerkracht de leerlingen dan te sterk in de weg om op een succesvolle manier te laten toewerken naar een groep, wat toch het hoofddoel van de eerste les of het eerste lesblok van de lessenreeks moet zijn en blijven. De in onze lessenreeks gehanteerde aanpak berust volgens deze leerkracht meer op de voorkennis van de leerlingen in vergelijking met een zuivere meetkundige aanpak. Het kan hierbij interessant zijn om in de toekomst de resultaten van ons interventieonderzoek naast deze van het onderzoek van Mathias Buckinx te leggen, om op die manier te weten te komen of de zojuist beschreven voorspelling die leerkracht B maakt ook effectief terug te vinden is in de bevindingen die in zijn onderzoek naar boven komen.

7.5 Sterktes en zwaktes van het onderzoek

Als sterkste punt zouden we willen aanhalen dat dit masterproefonderzoek ervoor gezorgd heeft dat er een lessenreeks rond groepentheorie ontwikkeld is die meteen bruikbaar is in de derde graad van het middelbaar onderwijs. Hopelijk zal deze lessenreeks er toe bijdragen dat de herinstructie van groepentheorie in het wiskunde curriculum van het Vlaamse onderwijs vlotter verloopt. Daarnaast stelde het interventieonderzoek ons in staat om antwoorden te formuleren op onze drie onderzoeksvragen. Persoonlijk wil ik hierbij het belang onderstrepen van het (overwegend) positieve antwoord op de eerste onderzoeksvraag. Het is namelijk zo dat de door ons uitgewerkte combinatie van de aanpak die specifiek focust op werken met tegenovergestelden, getallenverzamelingen en het rigoureuze oplossen van vergelijkingen om toe te werken naar de definitie van een groep in de wetenschappelijke literatuur naar ons weten de enige is die deze drie specifieke elementen combineert in een lessenreeks die gericht is op leerlingen uit het secundair onderwijs, en al zeker in een Vlaamse context. Deze aanpak lijkt dus aan te slaan en goed te werken in ons testpubliek, wat volgens mij het meest opmerkelijke en naar de toekomst toe bruikbare resultaat is van dit interventieonderzoek.

Aan de andere kant moeten we natuurlijk altijd voorzichtig zijn om onze conclusies te generaliseren, zoals ook aangegeven wordt door Verschaffel (2020). In dit onderzoek kwam dit vooral naar voren bij de vergelijking tussen het testpubliek en het doelpubliek van de nieuwe specifieke eindterm, waarbij de eindterm een breder (en minder sterk) doelpubliek beoogt dan het leerlingenpubliek waarbij de lessenreeks in dit onderzoek is uitgetest. We kunnen zelfs niet zeker zijn of onze conclusies ook algemeen gelden binnen de bredere populatie van leerlingen die in de derde graad kiezen om hun lessenspakket van zes uren wiskunde uit te breiden met twee extra seminarieuren wiskunde. De erg beperkte setting waarin dit onderzoek is uitgevoerd kunnen we dus aanhalen als een eerste zwakte van dit onderzoek. Aan de andere kant gaf deze beperkte setting ons wel de mogelijkheid om binnen dit verkennende interventieonderzoek door middel van de interviews en de logboeken diepgang te creëren, wat veel moeilijker zou zijn geweest indien dit onderzoek op een grotere schaal was uitgevoerd. Je zou de resultaten van dit masterproefonderzoek bijgevolg kunnen interpreteren als gefundeerde hypothesen die later in een grootschaligere context onderzocht kunnen worden.

Daarnaast kunnen we als zwakte van deze lessenreeks aanduiden dat de gebruikte onderzoeksmethodologie op sommige vlakken afgeweken is van de gebruikelijke voorschriften die onder andere door De Cock (2020) worden aangehaald. Zo werden bijvoorbeeld niet alle exacte bewoordingen van de antwoorden van de leerkrachteninterviews bewaard gebleven door middel van een technisch probleem bij de opname van het interview van leerkracht B. Ook schrijft de methodologische module van De Cock (2020) voor dat de afgenomen interviews normaliter bekeken moeten worden tweede onderzoeker om na te gaan en te controleren of de interpretaties die wij in dit onderzoek vastgehangen hebben aan de reacties van de leerkrachten en de leerlingen correct en verdedigbaar zijn. Dit is bij dit onderzoek onder andere door tijdsgebrek niet gebeurd. Wel controleerde de promotor van dit onderzoek dat hij bij het lezen van de gebruikte citaten van de leerkrachten- en leerlingeninterviews akkoord kon gaan met de daarbijhorende interpretaties.

7.6 Suggesties voor verder onderzoek

Tot slot kunnen we nog even bekijken welke suggesties voor verder onderzoek er aan het licht komen als we een terugkijkende blik werpen op dit interventieonderzoek. Ten eerste kunnen we aanhalen dat het testpubliek uit dit interventieonderzoek, drie vrij kleine klasgroepen uit verschillende scholen uit de ruime regio Kempen, relatief beperkt is. Ook het profiel van de leerlingen is in de drie klasgroepen ongeveer gelijk. Aangezien de lessenreeks uitgetest werd in de seminarie-uren wiskunde waar de leerkrachten meer vrije speling hebben en die vooral opgenomen worden door doorgaans sterkere wiskundeleerlingen werkte dit in de hand dat de lessenreeks nu uitgetest is bij een leerlingenpubliek dat in het algemeen sterker is dan het doelpubliek dat de specifieke eindterm voor ogen heeft. Een mogelijkheid zou dus zijn om deze lessenreeks uit te testen bij een breder en talrijker leerlingenpubliek, waarbij de eerder aangehaalde mogelijke aanpassingen aan de lessenreeks eventueel doorgevoerd kunnen worden. In dit geval zou het interessant zijn om te zien of de verwachting dat dit bredere publiek meer moeite zal hebben met de abstractie van de lessenreeks in vergelijking

met ons testpubliek en meer nood zal hebben aan een uitgewerkte praktische toepassing in de lessenreeks klopt en welke implicaties dit heeft voor het verloop van de lessenreeks. De opzet van een grootschaliger onderzoek zal echter niet eenvoudig zijn. Het is namelijk logisch dat de lessenreeks nu uitgetest is binnen de zogeheten seminarieuren wiskunde omdat de leerkracht binnen die uren veel vrijer is om zelf een invulling te geven aan de onderwerpen die in deze uren aan bod zullen komen. Binnen het standaard zesurenpakket wiskunde is deze speling veel minder aanwezig, waardoor het uiterst moeilijk zal worden om een grote groep leerkrachten te vinden die in hun zesuursklassen tien of meer lesuren de tijd zullen willen vrijmaken voor deze lessenreeks groepentheorie.

Een tweede suggestie voor verder onderzoek ligt in de samenhang tussen ons interventieonderzoek en het onderzoek uitgevoerd in het kader van de masterproef van Mathias Buckinx, dat eerder al aangehaald werd. Het zou interessant kunnen zijn om te vergelijken welke aanpak (een meer algebraïsche of een meer meetkundige) het beste werkt voor de leerlingen in het Vlaamse secundair onderwijs en om te kijken op welke vlakken de verschillende lessenreeksen van elkaar kunnen leren. Komend academiejaar zal er een student aan de KU Leuven opnieuw een masterproefonderzoek uitvoeren met de herintroduktie van groepentheorie in het Vlaamse onderwijs in de hoofdrol, waarbij onder andere de bevindingen van dit onderzoek en het onderzoek van Mathias Buckinx naast elkaar gelegd zullen worden en gecombineerd zullen worden.

Als derde en laatste puntje zouden we nog willen aanhalen dat dit onderzoek een hardnekkige verwarring tussen de termen associativiteit en commutativiteit aan het licht heeft gebracht bij ons testpubliek, wat een bevestiging is van wat reeds in de literatuur gekend was. Het zou hierbij eventueel interessant kunnen zijn om via een bredere studie na te gaan hoe sterk deze verwarring aanwezig is bij het bredere leerlingenpubliek in het Vlaamse secundair onderwijs. In dit onderzoek zou er dan uitgespit kunnen worden in welke mate de mogelijke oorzaken voor deze verwarring zoals aangebracht in het onderzoek van Larsen (2010) ook terug te vinden zijn bij het Vlaamse leerlingenpubliek, of dat deze verwarring meer te wijten is aan vergetelheid en het niet uit elkaar kunnen houden van twee moeilijke woorden, zoals we zelf voorstelden in paragraaf 7.1.

8 Bibliografie

Referenties

- Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187–239.
- Burn, B. (1996). What Are the Fundamental Concepts of Group Theory? *Educational studies in mathematics*, 31(4), 371–377.
- Cornock, C. (2015). Teaching group theory using Rubik’s cubes. *International journal of mathematical education in science and technology*, 46(7), 957–967.
- De Cock, M. (2020). Interviews, Methodologische module binnen de opleiding tot educatieve master, KU Leuven.
- Dorier, J.-l. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational studies in mathematics*, 29(2), 175–197.
- Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 267–305.
- Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1997). A Reaction to Burn’s ”What Are the Fundamental Concepts of Group Theory?”. *Educational studies in mathematics*, 34(3), 249–253.
- Freudenthal, H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A. G. Howson (Red.), *Developments in Mathematical Education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (101–114). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139013536.006>
- Galarza, P. (2017). Designing and Testing a Mathematics Card Game for Teaching and Learning Elementary Group Theory. *Journal of mathematics education at Teachers College*, 8(2).
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical thinking and learning*, 1(2), 155–177.
- Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational studies in mathematics*, 40(1), 71–90.
- Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *The Journal of mathematical behavior*, 20(2), 163–172.
- Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students’ Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange’s Theorem. 16(1), 23–26.
- Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. 28(2), 119–137.
- Larsen, S. (2010). Struggling to disentangle the associative and commutative properties. *For the learning of mathematics*, 30(1), 37–42.
- Larsen, S. P. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(4), 712–725.
- Learnifyable. (2014, augustus). (Abstract Algebra 1) Symmetries of a Square. <https://www.youtube.com/watch?v=8cUiLMqNfHg>
- Leron, U. & Ejersbo, L. R. (2016). What is the opposite of cat? A gentle introduction to group theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(1), 120–132.
- Maycock, E. J. “The Wild Side of Math”: Experimenting with Group Theory. eng. In: *Mathematics Education*. Association for Women in Mathematics Series. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 199–211. ISBN: 9783319449494.
- Oosse, W. J. (1969). Properties of operations: a meaningful study. *The Arithmetic teacher*, 16(4), 271–275.
- Staff, M. (2015, november). Group theory 101: How to play a Rubik’s Cube like a piano - Michael Staff. <https://www.youtube.com/watch?v=FW2Hvs5WaRY>
- Van Dooren, W. (2020). Toetsen en tests, Methodologische module binnen de opleiding tot educatieve master, KU Leuven.

- Veith, J. M. & Bitzenbauer, P. (2022). What Group Theory Can Do for You: From Magmas to Abstract Thinking in School Mathematics. *Mathematics (Basel)*, 10(5), 703.
- Verschaffel, L. (2020). Interventieonderzoek, Methodologische module binnen de opleiding tot educatieve master, KU Leuven.
- Wasserman, N. H. (2014). Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers. *PRIMUS : problems, resources, and issues in mathematics undergraduate studies*, 24(3), 191–214.
- Weber, K. & Larsen, S. (2008). Teaching and Learning Group Theory. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Red.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (139–152). Mathematical Association of America.

9 Bijlagen

Hieronder kan u de bijlagen bij deze masterproefthesis terugvinden. In volgorde kan u eerst de pdf-prints van de gebruikte PowerPointpresentaties van de lessenreeks terugvinden tezamen met het uitgewerkte gedetailleerde draaiboek voor het eerste lesblok. Daarna komen de vragen voor het logboek, de interviewleidraden met de leerkrachten en de leerlingen en tot slot staat de integrale weergave van de opgestelde toets afgebeeld, tezamen met de volledige resultaten van klasgroepen A en B.

9.1 PowerPointpresentaties gebruikt bij de lessenreeks

KU LEUVEN

Groepentheorie

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos

1

KU LEUVEN

Van de intuïtie rond tegenovergestelden naar de algebraïsche definitie van een groep

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos

2

Kadering van de lessenreeks



3

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

3

Kadering van de lessenreeks

- Wat is wiskunde?
 - Klassikale brainstorming
 - Wiskunde – Wikipedia
 - Abstraherende blik: veel entiteiten van zowel binnen als buiten de wiskunde gedragen zich eigenlijk op exact dezelfde manier.
 - Vb: getallenverzameling met een bewerking, Rubik's kubus, muziekkkoord
 - Nieuwe ontdekking voor de ene entiteit heeft gevolgen voor andere entiteiten met dezelfde abstracte structuur
 - Deze les: op zoek naar een wiskundige vorm van zo'n abstracte structuur: groepen

4

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

4

Aanpak van deze les

- Intuïtieve begrip 'tegenovergestelden'
- Op een wiskundige manier abstraheren
- A.d.h.v. 'duck test': voorwaarden formuleren waaraan een systeem moet voldoen om een groep te zijn.
- Doordringen naar de abstracte algebraïsche achtergrond van het brede concept van tegenovergestelden binnen de wiskunde

5

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

The logo of KU Leuven, consisting of the text 'KU LEUVEN' in white capital letters on a dark blue rectangular background.

5

Intuïtie rond tegenovergestelden

6

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

The logo of KU Leuven, consisting of the text 'KU LEUVEN' in white capital letters on a dark blue rectangular background.

6

Vrije associatie rond 'tegenovergestelden'

- Klassikale oef op tegenovergestelde van begrippen / woorden: zie bordschema!
- Algemener wetten in de intuïtieve wereld van de tegenovergestelden?
 - Verband tussen 2 tegenovergestelden?
 - Wat voor een soort object is het tegenovergestelde?
 - Heeft elk object een tegenovergestelde?
 - Zijn er objecten met meer dan één tegenovergestelde?
- Hoe moet het abstracte concept van 'tegenovergestelde' er dan uitzien in een wiskundig ideale wereld? Uitwerking op bordschema. (eventueel vragen pg. 3 van het draaiboek)

7

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



7

Vrije associatie 'tegenovergestelden': conclusies

- Binnen de 'ideale wiskundige wereld van tegenovergestelden':
 - We willen werken binnen eenzelfde verzameling.
 - We willen dat elk object een tegenovergestelde heeft.
 - We willen dat elk object precies één tegenovergestelde heeft.

8

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



8

Van willekeurige objecten naar getallen



9

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

9

Van willekeurige objecten naar getallen

- Back to basics!
- Antwoorden aanleren aan een computer: geen gebruik van intuïtie
 - Vb. Functie als een machine van \mathbb{R} naar \mathbb{R}
 - Computer als een machine: input $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow$ black box \rightarrow output: $f(x, y) \in \mathbb{R}$
- Think, pair, share:
 - Wat is de tegenpool van 3?
 - Wat is de tegenpool van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

10

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

10

Tegengestelde / omgekeerde getallen

- Waarom zijn 3 en -4 geen tegenovergestelden van elkaar?
- Definitie neutraal element.
- Think, pair, share:
 - Welke stappen zet de computer die enkel een optelling van twee getallen kan uitvoeren om op een bijna bewijstechnische manier de vergelijking $3 + x = 0$ op te lossen? Tip: balansmethode! Uitwerking: zie bordschema in draaiboek!
 - Werk analoog uit dat 3 en $1/3$ elkaars tegenovergestelden zijn voor de vermenigvuldiging in \mathbb{R} . Kan je hetzelfde schema gebruiken voor de 2×2 -matrix van daarstraks?

11

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



11

Naar de definitie van een groep



12

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



12

Naar de definitie van een groep: duck test

Think, pair, share: Welke bevindingen, termen, concepten en regels uit deze les zijn volgens jou het belangrijkste wanneer we een wiskundige beschrijving willen plakken op de structuur van de ideale wereld van de tegenovergestelden?

13

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



13

Definitie van een groep

Een **groep** $G, *$ is een verzameling G die voorzien is van een inwendige binaire bewerking $* : G \times G \rightarrow G$ waarbij voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- De bewerking $*$ is **associatief**: $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- $G, *$ heeft een **eenheidselement** of **neutraal element** e : $\exists e \in G : \forall x \in G : x * e = e * x = x$
- Elk element x van G heeft een **invers element**: $\forall x \in G, \exists y \in G : x * y = y * x = e$

14

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



14

Eenvoudige voorbeelden van groepen

15

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



15

Eenvoudige voorbeelden van groepen

- Welke voorbeelden van groepen zijn we al tegengekomen deze les?
- Think, pair, share: Voldoen de volgende verzamelingen met de aangegeven bewerkingen aan de definitie van een groep of niet? Waarom wel of waarom niet?
 - $\mathbb{N}, +$
 - $\mathbb{Z}, +$
 - $\mathbb{R}, +$
 - \mathbb{Q}, \cdot
 - \mathbb{R}, \cdot
- Welke groepen van matrices kennen jullie?

16

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



16

Terugkoppeling

17

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



17

Terugkoppeling

- Kijk terug naar dia 4:
 - Abstraherende blik: veel entiteiten van zowel binnen als buiten de wiskunde gedragen zich eigenlijk op exact dezelfde manier.
 - Bv: getallenverzameling met een bewerking, Rubik's – kubus, muziekkkoord: zullen allemaal gebaseerd zijn op de definitie van een groep
 - Bekijk het onderstaande filmpje:

[Group theory 101: How to play a Rubik's Cube like a piano - Michael Staff - YouTube](#)

18

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



18

Terugkoppeling

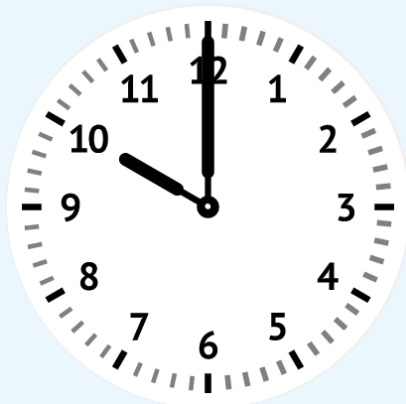
- Nieuwe ontdekking voor de ene entiteit heeft gevolgen voor andere entiteiten met dezelfde abstracte structuur
- Bewijzen voor de algemene groep \leftrightarrow bewijzen voor een specifieke groep
- Think, pair, share:
 - Hoeveel neutrale elementen heeft een groep?
 - Bewijs je bewering. Tip: veronderstel dat er 2 zijn, zeg e en e' . Verklaar elke stap die je zet!
- Hoeveel inversen heeft elk element van een groep?
Probeer je bewering te bewijzen. Veronderstel hierbij dat a als inversen b en b' heeft.
- Is een groep altijd uitgerust met een commutatieve bewerking?

Modulorekenen en groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$ en $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos

1

Instap: klokrekenen



- Het is nu 10 uur 's avonds. Hoe laat zal het exact 5 uur na dit tijdstip zijn?

- Antwoord: 3 uur
- Waarom?

$$10 + 5 = 15$$

$$15 - 12 = 3$$

Modulorekenen: $10 + 5 = 3 \pmod{12}$

- Wat gebeurt er als we 12 uur bij een tijdstip bijtellen?

2

2

Van een VWO-vraagstuk naar modulorekenen

8. Art schenkt vanaf vandaag (woensdag) elke dag 1 euro aan Artsen Zonder Grenzen. Op welke dag van de week zal hij zijn honderdste euro schenken?

- | | | |
|---------------|-------------|--------------|
| (A) maandag | (B) dinsdag | (C) woensdag |
| (D) donderdag | (E) vrijdag | |

- Op welke dag schenkt hij zijn 800^{ste} euro?
 - Op welke dag schenkt hij zijn 7000^{ste} euro?
 - Moet je veel rekenwerk verrichten om deze laatste vraag op te lossen? Waarom wel/niet?
 - Welk getal is hier het 'neutraal element' bij de optelling?
- Klokrekenen: $n=12$

3

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



3

Van een VWO-vraagstuk naar modulorekenen

- Welk getal is hier het 'neutraal element' bij deze optelling?
Antwoord: $n=7$ en
- Welk getal was het neutraal element bij eerder geziene groepen met de optelling als bewerking?
Antwoord: Het getal 0
- Oplossing: Bekijk enkel de getallen van 0 tot 6 en reken modulo 7: bekijk 7 opnieuw als 0.
- Link klokrekenen: je werkt met de getallen van 0 tot 11 en bekijkt 12 opnieuw als 0.

4

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



4

Van een VWO-vraagstuk naar modulorekenen

- Ken aan elke dag een volgnummer toe van 0 tot 6:
maandag= 0, dinsdag= 1, ... zaterdag=5, zondag=6.
- Het is nu dinsdag, welke dag is het binnen 3 dagen?
Antwoord: dinsdag (1) + 3 = vrijdag (4)
- Het is nu zaterdag, welke dag is het binnen 4 dagen?
Antwoord: $5 + 4 = 9$
 $9 - 7 = 2 =$ woensdag
- Algemeen: rekenen modulo n : werk met $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, tel op en trek eventueel n af van je antwoord om binnen deze verzameling te blijven.

Cayleytabellen

Cayleytabellen

- Hoe kunnen we alle mogelijke combinaties van optellingen schematisch weergeven?
Oplossing: Cayleytabel.
- Merk op: in elk vakje staat het element aan het linkse uiteinde van de rij van het vakje vermenigvuldigd met / opgeteld met het element aan het bovenste uiteinde van de kolom van het desbetreffende vakje.

*	a	b	c	\dots	n
a	$a*a$	$a*b$	$a*c$	\dots	$a*n$
b	$b*a$	$b*b$	$b*c$	\dots	$b*n$
c	$c*a$	$c*b$	$c*c$	\dots	$c*n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
n	$n*a$	$n*b$	$n*c$	\dots	$n*n$

7

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



7

Cayleytabel van de optelling modulo 7

- Wat moet er op welke plaats in de tabel komen?
- Schrijf deze tabel over en vul de tabel in.
- Notatie: $\mathbb{Z}_7, +$

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

8

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



8

Cayleytabel van $\mathbb{Z}_7, +$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

9

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



9

Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4, +$?

- Hoe zou de Cayleytabel eruit zien als we zouden leven op een planeet waar de week maar 4 dagen telt in plaats van 7?
- Vul de onderstaande Cayleytabel in.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

10

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



10

Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4, +$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

11

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



11

Van Cayleytabellen naar groepen?

Vorige geziene voorbeelden:

- $\mathbb{Z}_7, + : \{0, 1, \dots, 6\}$ met optelling modulo 7
- $\mathbb{Z}_4, + : \{0, 1, 2, 3\}$ met optelling modulo 4
- Klokrekenen: wordt $\mathbb{Z}_{12}, + : \{0, 1, \dots, 11\}$ met optelling modulo 12
- Gedrag van de bewerking volledig vastgelegd in de Cayleytabel
- Wacht eens! Verzameling met bewerking \longrightarrow begin van de definitie van een groep?

12

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



12

Groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$?

13

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



13

Definitie van een groep

Een **groep** $G, *$ is een verzameling G die voorzien is van een inwendige binaire bewerking $* : G \times G \rightarrow G$ waarbij voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- De bewerking $*$ is **associatief**: $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- $G, *$ heeft een **eenheidselement** of **neutraal element** e : $\exists e \in G : \forall x \in G : x * e = e * x = x$
- Elk element x van G heeft een **invers element**: $\forall x \in G, \exists y \in G : x * y = y * x = e$

- Onderzoeksvraag: ga aan de hand van de definitie van een groep na of $\mathbb{Z}_7, +$ en $\mathbb{Z}_4, +$ groepen zijn of niet.

14

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



14

Definitie van een groep

Een **groep** $G, *$ is een verzameling G die voorzien is van een inwendige binaire bewerking $*: G \times G \rightarrow G$ waarbij voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- De bewerking $*$ is **associatief**: $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- $G, *$ heeft een **eenheidselement** of **neutraal element** e : $\exists e \in G : \forall x \in G : x * e = e * x = x$
- Elk element x van G heeft een **invers element**: $\forall x \in G, \exists y \in G : x * y = y * x = e$

- De bewerking is inwendig, d.w.z $*: G \times G \rightarrow G$: OK
- Associatief: OK
- Neutraal element?
- Heeft elk element een invers element?

Heeft elk element een invers element?

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

- Ja! Het neutraal element 0 komt in elke rij en kolom van de beide Cayleytabellen exact 1 keer voor.
- Waarom is dit het antwoord op de vraag? Hertaal de voorwaarde uit de definitie naar de structuur van een Cayleytabel.
- Conclusie: $\mathbb{Z}_7, +$ en $\mathbb{Z}_4, +$ zijn (eindige) groepen!

Heeft elk element een invers element?

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

- Sterker nog, elk element komt in elke rij en kolom exact 1 keer voor!
- Structuur: Latijnse vierkanten, 'sudokustructuur'
- Welk effect heeft dit voor het oplossen van vergelijkingen?
- Eventueel bewijs

17

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



17

Groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$

- Definitie van een groep werkt voor alle verzamelingen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$ met $n \in \mathbb{N}$ en met $+$, de optelling modulo n .
- Voorbeelden van eindige groepen! $\mathbb{Z}_n, +$ heeft immers n elementen.
- Logische vervolgvraag: zijn er ook eindige groepen met de vermenigvuldiging als bewerking?
- Voorstel?

18

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



18

Eindige multiplicatieve groepen?

19

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



19

Cayleytabellen van \mathbb{Z}_7, \cdot en \mathbb{Z}_4, \cdot : groepen?

\times	0	1	2	3	4	5	6
0	0	●	0	0	0	0	0
1	0	1	●	3	4	5	6
2	0	2	4	●	●	3	●
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	●	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	●	2
6	0	6	5	4	3	2	●

\times	0	1	2	3
0	0	●	0	0
1	0	1	●	3
2	0	2	●	2
3	0	●	2	●

20

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



20

Cayleytabellen van \mathbb{Z}_7, \cdot en \mathbb{Z}_4, \cdot : groepen?

- Probleem?
- 0 als opslorpend element bij de vermenigvuldiging.
- Werp de 0 weg en ga verder met de rest, dan wel voldaan aan de definitie van een groep? Inwendigheid van de bewerking? Associatief? Neutraal element? Inversen?
- $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot$ voldoet aan de definitie van een groep!
- $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot$ niet: er staat nog een 0 in het midden van de Cayleytabel: $2 \cdot 2 = 0 \pmod{4}$
- Probleem bij $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot$ als $a \cdot b = n$: 0 in tabel. Wanneer komt dit niet voor?

21

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



21

Conclusies

- Er bestaan groepen met maar een eindig aantal elementen!
- Definitie van een groep werkt voor alle verzamelingen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$ met $n \in \mathbb{N}$ met de optelling modulo n .
- Definitie van een groep werkt NIET voor alle verzamelingen van de vorm \mathbb{Z}_n, \cdot met $n \in \mathbb{N}$ met de vermenigvuldiging modulo n .
- Definitie van een groep werkt voor alle verzamelingen van de vorm $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$ met p een priemgetal met de vermenigvuldiging modulo p .
- Of algemener: vertrek van \mathbb{Z}_n, \cdot met de vermenigvuldiging modulo n en werp daarna de 0 en alle elementen k met $\text{ggd}(k, n) \neq 1$ weg.
- Toepassing: versleutelingsalgoritmen.

22

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



22

Isomorfismen tussen groepen: voorbeelden, tegenvoorbeeld en definitie

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos

1

Fundamentele vraag van de dag:
Wanneer zijn 2 groepen 'hetzelfde'?

2

2

Vorige lessen: geziene voorbeelden groepen

- Eerste les: oneindige groepen, onder andere de inverteerbare matrices van dezelfde afmetingen met de matrixvermenigvuldiging, etc.
- Vorige les: eindige groepen: $\mathbb{Z}_n, +$ en $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$
- Zijn er eindige groepen van matrices mogelijk?

3

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



3

Eerste voorbeeld: Invoering notaties

- Straks: kandidaat-groep met vierkante 2×2 -matrices, onder andere $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Probleem: op zoek naar een handigere notatie: matrices vragen veel schrijfwerk.
- Enkel elementen op hoofddiagonaal of nevendiagonaal.
- Enkel de getallen $+1$ en -1 op de hoofd- of nevendiagonaal.
- Notatie: H of N: hoofddiagonaal of nevendiagonaal
- $++$, $+-$, $-+$, $--$: teken van het element op de eerste en tweede rij.
- Voorbeelden: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ wordt H+ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ wordt N--.

4

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



4

Invoering notaties: oefeningen

- Welke notatie komt overeen met de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?
- Welke matrix komt overeen met de notatie H_{++} ?
- Welke met de notatie N_{-+} ?

5

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

5

Kandidaat-groepen als eindige groep van matrices



6

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

6

Opdracht: Cayleytabellen 3 kandidaat-groepen

- Stel de Cayleytabellen op van de onderstaande 3 kandidaat-groepen. Voldoen deze aan de definitie van een groep? Werk hiervoor met de sjablonen! Tip: werk met de ingevoerde notaties en sla de matrices op in je grafisch rekenoestel.

$$G_{1,\cdot} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \cdot$$

$$G_{2,\cdot} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \cdot$$

$$G_{3,\cdot} = \{1, i, -1, -i\}, \cdot$$

7

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



7

Cayleytabellen

*	H++	N-+	H--	N+-
H++				
N-+				
H--				
N+-				

*	H++	H+-	H-+	H--
H++				
H+-				
H-+				
H--				

*	1	i	-1	-i
1				
i				
-1				
-i				



8

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



8

Cayleytabellen: overeenkomsten?

- Zijn er overeenkomsten in de structuur van deze Cayleytabellen? Hint: geef de overeenkomstige elementen binnen een Cayleytabel eens dezelfde kleur.

*	H++	N-+	H--	N+-
H++	H++	N-+	H--	N+-
N-+	N-+	H--	N+-	H++
H--	H--	N+-	H++	N+-
N+-	N+-	H++	N-+	H--

*	H++	H+-	H-+	H--
H++	H++	H+-	H-+	H--
H+-	H+-	H++	H--	H-+
H-+	H-+	H--	H++	H+-
H--	H--	H-+	H+-	H++

*	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

9

9

Cayleytabellen: overeenkomsten?

- $G_{1, \cdot}$ en $G_{3, \cdot}$ hebben in hun Cayleytabel exact dezelfde kleuring! Deze verschilt van de kleuring in de tabel van $G_{2, \cdot}$.

*	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●

*	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●

*	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●

10

10

Cayleytabellen: overeenkomsten?

- Misschien wel dezelfde kleuring als we de volgorde van de elementen in de Cayleytabel van $G_{2, \cdot}$ zouden verwisselen?
- Redenering:
 - Gele en groene bolletjes staan in beide tabellen op dezelfde plaatsen: OK, laten staan.
 - Eventueel blauw en geel van plaats wisselen?
 - Gaat niet werken: blauw = uniek neutraal element in beide groepen.
- Conclusie: $G_{1, \cdot}$ en $G_{2, \cdot}$ hebben een fundamenteel andere structuur. $G_{1, \cdot}$ en $G_{3, \cdot}$ daarentegen hebben 'dezelfde structuur'.

*	Blue	Yellow	Red	Green
Blue	Blue	Yellow	Red	Green
Yellow	Yellow	Red	Green	Blue
Red	Red	Green	Blue	Yellow
Green	Green	Blue	Yellow	Red

*	Blue	Yellow	Red	Green
Blue	Blue	Yellow	Red	Green
Yellow	Yellow	Blue	Green	Red
Red	Red	Green	Blue	Yellow
Green	Green	Red	Yellow	Blue

11

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

11

Wanneer zijn 2 groepen 'hetzelfde'?

Isomorfisme: definitie en toepassing

12

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

12

Definitie isomorfisme en isomorfe groepen

- De inwendige structuur van de Cayleytabellen van $G_{1,\cdot}$ en $G_{3,\cdot}$ is exact hetzelfde: te zien via kleuring.
- Herinner: gedrag van de bewerking van een groep wordt volledig vastgelegd in diens Cayleytabel.
- Intuïtie: $G_{1,\cdot}$ en $G_{3,\cdot}$ hebben als groep dezelfde vorm en zijn op een bepaalde manier 'hetzelfde'.
- Nood aan een exacte definitie: isomorfisme

13

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



13

Definitie isomorfisme en isomorfe groepen

- Grieks: isos = dezelfde, morfein = vorm: isomorf = dezelfde vorm hebbend

Twee groepen $G, *$ en H, \diamond zijn **isomorf** wanneer er een bijectieve afbeelding (isomorfisme) $f : G \rightarrow H$ bestaat zodat het volgende geldt:

$$\forall x, y \in G : f(x * y) = f(x) \diamond f(y).$$

- Bijtief: 2 verschillende elementen uit G worden altijd afgebeeld op 2 verschillende elementen in H + voor elk element h in H moet er een element g uit G te vinden zijn dat op h wordt afgebeeld.

14

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



14

Isomorfisme tussen $G_{1,\cdot}$ en $G_{3,\cdot}$

- Wat moeten we doen? Op zoek gaan naar een functie $f: G_{1,\cdot} \rightarrow G_{3,\cdot}$ die aan de definitie voldoet.
- Werkwijze: probeer elk element uit $G_{1,\cdot}$ af te beelden op het element uit $G_{3,\cdot}$ dat dezelfde rol speelt in de Cayleytabel.
- Opstellen expliciet isomorfisme + voorwaarde uit definitie nagaan op het bord: zie tweede deel bordschema pg.12 uit het draaiboek.

15

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



15

Isomorfisme met $\mathbb{Z}_4, +$?

- $G_{1,\cdot}$ en $G_{2,\cdot}$ (en ook $G_{3,\cdot}$) zijn eindige groepen met 4 elementen.
- Herinner uit vorige les: $\mathbb{Z}_4, +$ is ook een eindige groep met 4 elementen.
- Logische vraag: is $\mathbb{Z}_4, +$ misschien ook isomorf met $G_{1,\cdot}$ of $G_{2,\cdot}$?
- Opdracht: Ga na met welke van deze 2 groepen $\mathbb{Z}_4, +$ eventueel isomorf is, stel zelf een isomorfisme f op en ga a.d.h.v. enkele voorbeelden zoals daarjuist na of er voldaan is aan de voorwaarde uit de definitie.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

16

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



16

Afsluiter: complexe getallen altijd voorstelbaar in matrixvorm?

- Kijk terug naar isomorfisme tussen $G_{1,\cdot}$ en $G_{3,\cdot}$: complexe getallen kunnen blijkbaar voorgesteld worden door matrices die zich voor de vermenigvuldiging 'hetzelfde' gedragen.
- Dit kan veralgemeend worden: een complex getal $a + bi$ kan steeds gekoppeld worden aan de 2×2 -matrix van de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- Overeenkomstig gedrag bij de vermenigvuldiging?
- Opdracht: kijk eens na wat er met het product $(a + bi) \cdot (c + di)$ gebeurt wanneer je dit zowel in de vorm van complexe getallen als matrices berekent.

17

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



17

Extra: isomorfisme met $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot$?

- Enkel indien er veel tijd over is!
- $G_{1,\cdot}$ en $G_{2,\cdot}$ (en ook $G_{3,\cdot}$) zijn eindige groepen met 4 elementen.
- Herinner uit vorige les: $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot$ is ook een eindige groep met 4 elementen.
- Opdracht: Ga na of $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot$ isomorf is met $\mathbb{Z}_4, +$ of met $G_{2,\cdot}$, stel zelf een isomorfisme f op en ga a.d.h.v. enkele voorbeelden zoals daarjuist na of er voldaan is aan de voorwaarde uit de definitie. Let op, het kan zijn dat de Cayleytabellen niet exact dezelfde kleuring hebben: elementen moeten eventueel van plaats gewisseld worden.

\times	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

18

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



18

KU LEUVEN

Symmetriegroepen: D_4 met alternatieve voorstelling als eindige groep van matrices

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos

1

G_4 , als eindige groep van matrices?

2

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

2

$G_{4,\cdot}$ als eindige groep van matrices?

- Opdracht: Stel de Cayleytabel op van de volgende kandidaat-groep van matrices met de matrixvermenigvuldiging als bewerking.

$$G_{4,\cdot} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

- Werk hiervoor met het sjabloon! Gebruik ook de eerder ingevoerde notatie voor deze matrices, bv. H++ en N-+.
- Zet deze matrices in je GRM of Geogebra en reken zo de producten uit.
- Ga slim te werk: herbekijk eerst wat je al kan invullen door naar de Cayleytabellen van de groepen $G_{1,\cdot}$ en $G_{2,\cdot}$ van vorige les te kijken!

3

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



3

Cayleytabel van $G_{4,\cdot}$

*	H++	N-+	H--	N+-	H-+	H+-	N--	N++
H++								
N-+								
H--								
N+-								
H-+								
H+-								
N--								
N++								

- Kan je vanuit de Cayleytabel besluiten dat $G_{4,\cdot}$ een groep is?
- Inwendige bewerking?
Associatief? Neutraal element?
Heeft elk element een inverse?

- Is dit ook een commutatieve groep? Hoe kan je dit zien in de Cayleytabel?

4

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



4

Waarom is deze groep interessant? Symmetriegroepen: de groep $D_{4,\circ}$

5

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

5

Symmetriegroepen: de groep $D_{4,\circ}$

- Bekijk het volgende filmpje:
<https://www.youtube.com/watch?v=8cUiLMqNfHg>



6

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

6

Overeenkomsten tussen $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$?

- Welke overeenkomsten zijn er tussen de structuur van de Cayleytabellen van $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$?

*	H++	N+	H-	N+	H+	H+	N-	N++
H++	H++	N+	H-	N+	H+	H+	N-	N++
N+	N+	H-	N+	H++	N-	N++	H+	H+
H-	H-	N+	H++	N+	H+	H+	N++	N-
N+	N+	H++	N+	H-	N++	N-	H+	H+
H+	H+	N++	H+	N-	H++	H-	N+	N+
H+	H+	N-	H+	N++	H-	H++	N+	N+
N-	N-	H+	N++	H+	N+	N+	H++	H-
N++	N++	H+	N-	H+	N+	N+	H-	H++

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

7

KU LEUVEN

7

Overeenkomsten tussen $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$?

- Welke overeenkomsten zijn er tussen de structuur van de Cayleytabellen van $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$?

*	H++	N+	H-	N+	H+	H+	N-	N++
H++	H++	N+	H-	N+	H+	H+	N-	N++
N+	N+	H-	N+	H++	N-	N++	H+	H+
H-	H-	N+	H++	N+	H+	H+	N++	N-
N+	N+	H++	N+	H-	N++	N-	H+	H+
H+	H+	N++	H+	N-	H++	H-	N+	N+
H+	H+	N-	H+	N++	H-	H++	N+	N+
N-	N-	H+	N++	H+	N+	N+	H++	H-
N++	N++	H+	N-	H+	N+	N+	H-	H++

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

8

KU LEUVEN

8

Overeenkomsten tussen $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$?

- De Cayleytabellen van $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$ hebben exact dezelfde structuur!
- Herinner vorige les: $G_{4,\cdot}$ en $D_{4,\circ}$ zullen isomorf zijn! Welk isomorfisme?

*	H++	N+-	H--	N+-	H+-	H+-	N--	N++
H++	H++	N+-	H--	N+-	H+-	H+-	N--	N++
N+-	N+-	H--	N+-	H++	N--	N++	H+-	H+-
H--	H--	N+-	H++	N+-	H+-	H+-	N++	N--
N+-	N+-	H++	N+-	H--	N++	N--	H+-	H+-

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2

H+-	H+-	N++	H+-	N--	H++	H--	N+-	N+-
H+-	H+-	N--	H+-	N++	H--	H++	N+-	N+-
N--	N--	H+-	N++	H+-	N+-	N+-	H++	H--
N++	N++	H+-	N--	H+-	N+-	N+-	H--	H++

μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

9

KU LEUVEN

9

Tussentijdse conclusie

- De eindige groep van matrices $G_{4,\cdot}$ en de symmetriegroep van het vierkant $D_{4,\circ}$ zijn isomorf.
- Isomorfisme: beeld elke matrix uit $G_{4,\cdot}$ af op de symmetrie die op de overeenkomstige plaats in de Cayleytabel van $D_{4,\circ}$ staat.
- Wat heeft dit voor consequenties?
- Een matrix uit $G_{4,\cdot}$ gedraagt zich blijkbaar als een symmetrie van het vierkant? Hoe kunnen we dit zien?

10

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

10

Hertaling van de matrices uit G_4 , naar de symmetrieën van het vierkant

11

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

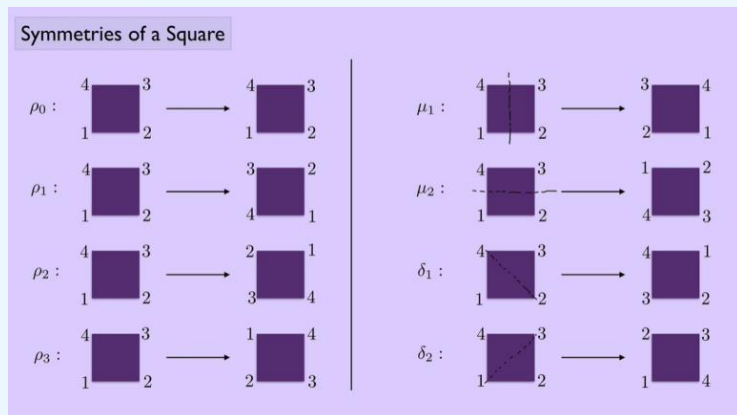


11

De symmetrieën van het vierkant

- Werkwijze filmpje: specifieke symmetrie wordt getypeerd a.d.h.v. waar de 4 hoekpunten naar toe gaan.
- Hoe kunnen we dit koppelen aan matrices?

Symmetries of a Square



ρ_0 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$
 ρ_1 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$
 ρ_2 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$
 ρ_3 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

μ_1 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$
 μ_2 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$
 δ_1 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$
 δ_2 : $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix}$

12

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



12

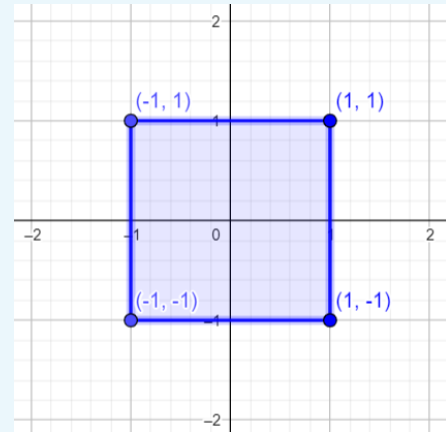
Matrices uit $G_{4,\cdot}$ als symmetrieën van het vierkant?

Aanpak

- Stel de hoekpunten van het vierkant voor d.m.v. de volgende kolommatrices:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vermenigvuldig deze kolommatrices langs links met een matrix uit $G_{4,\cdot}$.
- Op welke andere kolommatrices worden deze kolommatrices door de gekozen matrix afgebeeld?
- Interpreteer dit meetkundig: Waarop worden de vier hoekpunten van het vierkant afgebeeld door de vermenigvuldiging? Kan je dit hertalen naar een symmetrie van het vierkant uit $D_{4,\circ}$?



13

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

13

Klassikaal voorbeeld: de matrix $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

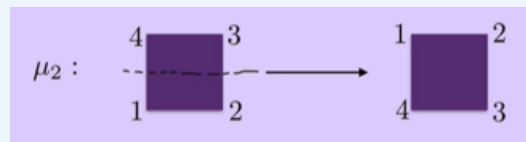
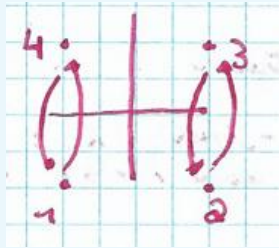
14

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

14

Klassikaal voorbeeld: de matrix $H_{+-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ komt overeen met de spiegeling μ_2 uit het filmpje.



- Kijk eens na: staan H_{+-} en μ_2 op dezelfde plaatsen in de Cayleytabellen?

15

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

15

Opdracht

- Herhaal nu zelf de stappen uit het klassikaal voorbeeld voor de onderstaande matrices. Op welke kolommatrices beelden de onderstaande matrices de kolommatrices van de hoekpunten af? Met welke symmetrie van het vierkant komt dit overeen? Staan deze matrix en zijn overeenkomstige symmetrie op dezelfde plaatsen in de Cayleytabellen?
- $N_{-+} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N_{++} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $H_{-+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

16

Oplossing: $N_{-+} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Handwritten calculations on grid paper showing the inverse of a 2x2 matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

17

Oplossing: $N_{++} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Handwritten calculations on grid paper showing the inverse of a 2x2 matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

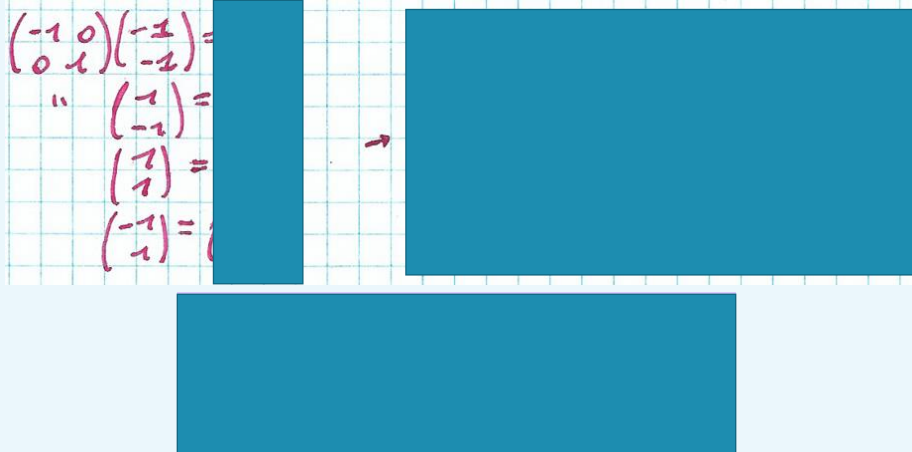
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

18

Oplossing: $H_{-+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Conclusies

- De eindige groep van matrices $G_{4,\cdot}$ en de symmetriegroep van het vierkant $D_{4,\circ}$ zijn isomorf.
- De matrices uit $G_{4,\cdot}$ kunnen hertaald worden naar symmetrieën van het vierkant uit $D_{4,\circ}$: kijk wat er met de hoekpunten gebeurt wanneer je deze langs links vermenigvuldigt met die matrices.
- Verrassend: deze matrices blijken zich dus volledig hetzelfde te gedragen als 'meetkundige objecten', namelijk de symmetrieën van het vierkant.
- Nut groepentheorie: als je iets fundamenteels aantooit voor $G_{4,\cdot}$, betekent dit automatisch dat dit ook moet gelden voor de groep van symmetrieën van het vierkant of omgekeerd, hoewel deze op het eerste gezicht niets met elkaar te maken hebben!

Veralgemening: rotatiematrices

21

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



21

Extra: rotatiematrices: algemene definitie

- De matrices H++, N-+, H- en N+- komen overeen met specifieke rotaties van het vierkant: tegen de klok in over 0°, 90°, 180° en 270°.
- Een soortgelijke relatie is breder geldig: een rotatie over een positieve hoek α , genoteerd met R_α , kan weergegeven worden door de volgende matrix:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- Toepassing: numerieke wiskunde: computer gebruikt dit o.a. het oplossen van stelsels, het bepalen van eigenwaarden van een gegeven matrix etc.
- Rotatiematrices vormen een groep met de vermenigvuldiging als bewerking.

22

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



22

Extra: rotatiematrices: opdracht

- Ga na dat R_α effectief een rotatie over een hoek α voorstelt door na te gaan waarop deze matrix de eenheidsvectoren langs de positieve x-as en y-as afbeeldt. Leg hierbij de link met de notie van de goniometrische cirkel.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Permutatiegroepen + deelgroepen

Lessenreeks groepentheorie
Ben Vos



1

Instap: permutaties: definitie en
samenstelling van permutaties



2

2

Permutaties: definitie

- Een permutatie van een eindige verzameling is een herschikking van deze verzameling, dat wil zeggen het uitvoeren van 0 of meer verwisselingen van de elementen van deze verzameling.

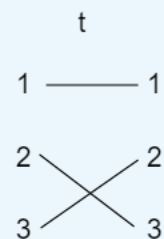
- Voorbeeld: neem als verzameling het drietal getallen $\{1,2,3\}$.

- Permutatie t : 1 gaat naar 1, 2 gaat naar 3, 3 gaat naar 2.

- De elementen worden herschikt in een andere volgorde.

- Notatie in matrixvorm: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Hoeveel permutaties van 3 elementen zijn er? En van n elementen?



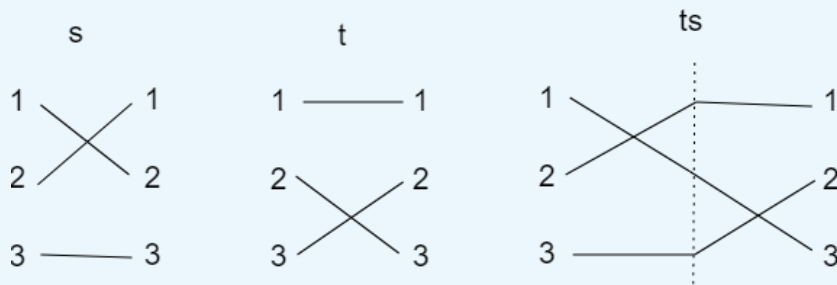
3

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

3

Samenstellen van 2 permutaties

- Permutaties s en t gegeven. Oefening: schrijf s in matrixvorm.
- Samenstelling: de permutatie $t \circ s$: lees dit als 't na s': voer eerst s uit en dan t .
- Oefeningen: schrijf de permutatie $t \circ s$ in matrixvorm. Hoe ziet de permutatie $s \circ t$ eruit?



4

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

4

Permutaties van 3 elementen met de samenstelling: een groep?

5

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



5

Permutaties van de verzameling met 3 elementen

- Er bestaan $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutaties van de verzameling $\{1,2,3\}$.
- Opdracht: ga op zoek naar de matrixvormen van deze 6 permutaties.
- Nieuwe notatie: in de matrixvormen van deze permutaties is de eerste rij steeds hetzelfde. Alle informatie over de permutatie zit vervat in de onderste rij. We kunnen de permutatie dus ook typeren door enkel naar de onderste rij te kijken.
- Voorbeelden: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ wordt 132 en 213 staat voor $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos



6

Vormen de verzameling van permutaties van $\{1,2,3\}$ met de samenstelling een groep?

- Vervolledig de onderstaande Cayleytabel door de samenstellingen op de plaatsen met de vakjes uit te rekenen. Herinner: element uit de meest linker kolom \circ element uit de bovenste rij van de tabel. Let op: hier wordt gewerkt met de nieuwe notatie voor permutaties zoals aangebracht op vorige slide.

\circ	123	213	132	321	231	312
123	123	213	132	321	231	312
213	213		231	312	132	321
132	132	312	123	231	321	
321	321	231	312	123	213	132
231	231	321	213	132	312	123
312	312	132	321	213		231

7

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

7

Vormen de verzameling van permutaties van $\{1,2,3\}$ met de samenstelling een groep?

- Voldoet deze Cayleytabel aan de definitie van een groep?
- Inwendigheid bewerking?
- Associatief?
- Neutraal element?
- Heeft elke permutatie een inverse?

\circ	123	213	132	321	231	312
123	123	213	132	321	231	312
213	213	123	231	312	132	321
132	132	312	123	231	321	213
321	321	231	312	123	213	132
231	231	321	213	132	312	123
312	312	132	321	213	123	231

- Conclusie:

-

8

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

8

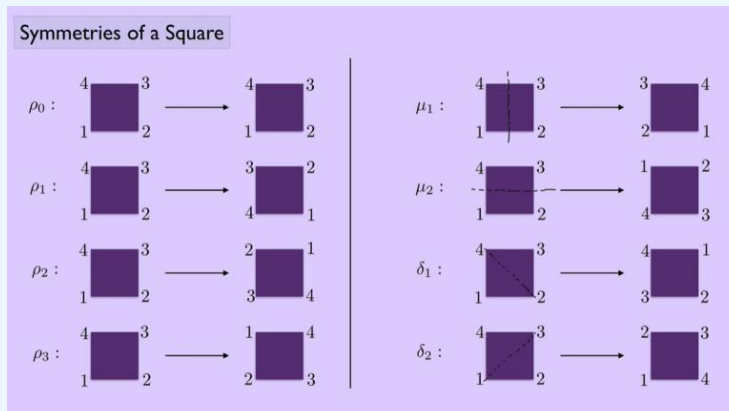
Groepen van de vorm $S_{n, \circ}$

- Conclusie vorige slide: de verzameling van permutaties van de verzameling $\{1,2,3\}$ met de samenstelling voldoet aan de definitie van een groep.
- Notatie: $S_{3, \circ}$
- Algemeen: de verzameling van permutaties van de verzameling $\{1,2, \dots, n\}$ met de samenstelling voldoet aan de definitie van een groep.
- Notatie: $S_{n, \circ}$
- De groep $S_{n, \circ}$ heeft $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ elementen.
- Toepassing: Rubik's kubus kan hertaald worden naar een permutatiegroep.

Permutaties van 4 elementen: link met de symmetriegroep $D_{4, \circ}$?

Herneming: de groep $D_{4,\circ}$

- Herinner: werkwijze filmpje: specifieke symmetrie wordt getypeerd a.d.h.v. waar de 4 hoekpunten naar toe gaan.
- Hertalen naar permutaties van de 4 hoekpunten: op bord a.d.h.v. bordschema op pagina 17 van het draaiboek.



11

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

11

Herneming: de groep $D_{4,\circ}$

- De elementen uit de groep $D_{4,\circ}$ kunnen hertaald worden in termen van permutaties van de 4 hoekpunten!
- Overeenkomst tussen matrices uit $G_{4,\cdot}$, symmetrieën van het vierkant uit $D_{4,\circ}$ en permutaties uit de groep $S_{4,\circ}$.
- Maar! $D_{4,\circ}$ heeft 8 elementen en $S_{4,\circ}$ heeft $4! = 24$ elementen. Er zijn dus meer permutaties van de verzameling van 4 elementen dan dat er elementen in $D_{4,\circ}$ zijn.
- Opdracht: zoek zelf een permutatie uit $S_{4,\circ}$ die niet overeenkomt met een symmetrie van het vierkant uit $D_{4,\circ}$.

12

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

12

Groepen in een groep? Deelgroepen



13

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

13

$D_{4,\circ}$ en $S_{4,\circ}$, een groep in een groep?

- Elk element uit de groep $D_{4,\circ}$ kan weergegeven worden als een permutatie uit de groep $S_{4,\circ}$.
- Maar de groep $S_{4,\circ}$ omvat meer permutaties dan $D_{4,\circ}$.
- Conclusie: $D_{4,\circ}$ als groep van permutaties zit vervat in een grotere groep van permutaties, namelijk $S_{4,\circ}$.
- Belangrijk: de bewerking is in beide gevallen hetzelfde, namelijk de samenstelling van functies.

14

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

14

Deelgroepen: definitie

- Nood aan een formelere definitie van de notie van ‘een groep binnen een groep’.
- Oplossing: definitie deelgroep.

Zij $G, *$ een groep en $H \subseteq G$ een deelverzameling van de verzameling G . Dan is H een **deelgroep** van $G, *$ als en slechts als $H, *$ een groep is.

- Gevolg: $D_{4,\circ}$ als groep van permutaties is een deelgroep van $S_{4,\circ}$.
- Vrije keuze: eventueel een paar eenvoudige voorbeelden van deelgroepen nu behandelen.

Deelgroepen: opdracht

- (In geval van tijdsnood: rond zeker af met de afrondende beschouwingen!)
- Herbekijk de groep $G_{4,\cdot}$ ($D_{4,\circ}$ in matrixvorm).
- Ga op zoek naar zo veel mogelijk deelgroepen van deze groep met behulp van de definitie van deelgroepen.
- Wat kun je te weten komen in termen van isomorfismen met de andere gedaantes van de groep $G_{4,\cdot}$?

•

•

*	H++	N-+	H--	N+-	H+-	H+-	N--	N++
H++	H++	N-+	H--	N+-	H+-	H+-	N--	N++
N-+	N-+	H--	N+-	H++	N--	N++	H+-	H+-
H--	H--	N+-	H++	N+-	H+-	H+-	N++	N--
N+-	N+-	H++	N+-	H--	N++	N--	H+-	H+-
H+-	H+-	N++	H+-	N--	H++	H--	N+-	N+-
H+-	H+-	N--	H+-	N++	H--	H++	N+-	N+-
N--	N--	H+-	N++	H+-	N+-	N+-	H++	H--
N++	N++	H+-	N--	H+-	N+-	N+-	H--	H++

Afrondende beschouwingen



17

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

17

Terugblik op de ganze lessenreeks

- Van de intuïtie rond de ideale wereld van tegenovergestelden naar de definitie van een groep
- Voorbeelden van oneindige groepen
- Modulo rekenen met eindige groepen van de vorm $\mathbb{Z}_n, +$ en $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot$
- Wanneer zijn 2 groepen 'hetzelfde'? Isomorfe groepen en isomorfismen
- Eindige groepen van matrices
- Symmetriegroepen
- Permutatiegroepen
- Deelgroepen

18

Lessenreeks groepentheorie Ben Vos

18

Waarom groepen bestuderen?

- Getallenverzamelingen, modulorekenen, bepaalde verzamelingen van matrices, symmetrieën van een meetkundige figuur, permutaties, ...
- Allemaal zaken die op het eerste gezicht in de verste verte niets met elkaar te maken lijken te hebben.
- Maar! Diep binnenin zijn ze allemaal gebaseerd op dezelfde structuur, namelijk de definitie van een groep!
- Bewijs je iets voor een algemene groep, dan is datgene wat je bewijst automatisch waar voor al deze uiteenlopende voorbeelden: de kracht van abstractie.

Waarom groepen bestuderen?

- Veel sterker nog:
- Eindige groep van matrices G_4, \cdot
- Groep van symmetrieën van het vierkant D_4, \circ
- D_4, \circ hertaald als groep van permutaties van een verzameling van 4 elementen
- Deze 3 groepen zijn allemaal isomorf met elkaar en zijn dus voor een wiskundige op een abstracte manier 'exact hetzelfde'.
- Ontzettend veel mogelijkheden: elke mogelijke vraag over D_4, \circ kan opgelost worden met behulp van permutaties of de matrices uit G_4, \cdot !

**THE PURE
MATHEMATICIAN, LIKE
THE MUSICIAN, IS A
FREE CREATOR OF HIS
WORLD OF ORDERED
BEAUTY.**

BERTRAND RUSSELL

21

groepentheorie Ben Vos

KU LEUVEN

21

[H!]

9.2 Uitgewerkt gedetailleerd draaiboek eerste lesblok

Draaiboek eerste lesblok groepentheorie

Ben Vos (r0694274)

15 augustus 2022

1 Kadering van de lessenreeks aan de leerlingen

Laat de leerlingen enkele minuten debatteren over de vraag “Wat is wiskunde?”. Jullie kennen wiskunde allemaal als schoolvak maar waar houdt de wiskunde zich in het binnenste van zijn ziel mee bezig? Luister naar de antwoorden van de leerlingen. Ga vervolgens naar de nederlandse wikipedia-pagina van “wiskunde”: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Wiskunde>. De definitie van wiskunde die daar gegeven wordt is de volgende: Wiskunde is een formele wetenschap die onder andere getallen, patronen en abstracte structuren bestudeert. Een van de hoofddoelen van de wiskunde is dus het bestuderen en onderzoeken van patronen en abstracte structuren. Er blijkt te gelden dat veel entiteiten van zowel binnen als buiten de wiskunde zich eigenlijk op exact dezelfde manier gaan gedragen als je ernaar kijkt met een abstraherende blik. Op het eerste gezicht lijken getallenverzamelingen met een bewerking, een Rubiks kubus of een muziekakkoord helemaal niks met elkaar te maken te hebben, maar toch bestaan er veel interne gelijkenissen tussen wanneer je dieper begint te graven. Als we bijgevolg nieuwe dingen te weten willen komen over een Rubiks kubus of een muziekakkoord dan kunnen we even goed proberen om door te dringen tot die interne structuur om dan op dat niveau iets fundamenteels te gaan onderzoeken. Misschien heeft een nieuwe ontdekking dan ook wel meteen een implicatie voor een andere toepassing die ook steunt op diezelfde abstracte structuur? In deze les gaan we op zoek naar een wiskundige vorm van zo een abstracte structuur. We zullen deze groepen gaan noemen. (Na de definitie van een groep opgesteld te hebben zal er worden aangeraden om een filmpje te bekijken die de overeenkomsten tussen de Rubiks kubus, muziekakkoorden en de definitie van een groep verduidelijkt.)

We gaan in deze eerste les proberen om samen op een wiskundige manier een abstractie te maken van het intuïtieve concept van tegenovergestelden in de wereld om ons heen. Op die manier gaan we daarna trachten om samen een definitie op te stellen van wat een wiskundige groep nu precies is. We zullen daarvoor werken met een soort van ‘duck test’. Een duck test gaat uit van het volgende principe: als iets eruitziet als een eend, zwemt als een eend en kwaakt als een eend, dan is het waarschijnlijk een eend. We gaan dus straks proberen om soortgelijke voorwaarden te formuleren waaraan een systeem moet voldoen om een groep te zijn. Die voorwaarden zullen we proberen te achterhalen door eerst het algemene concept tegenovergestelde te gaan onderzoeken en daarbij door te dringen naar de abstracte algebraïsche achtergrond van het brede concept van tegenovergestelden binnen de wiskunde. Je zal merken dat we hierbij helemaal ‘back to basics’ gaan. Het kan misschien op het eerste gezicht allemaal als vrij triviaal overkomen, maar probeer hierbij de bril van een wiskundige onderzoeker op te zetten.

2 Vrije associatie tegengestelden/omgekeerden/inversen: van schijnbaar willekeurige objecten naar getallen naar de definitie van een groep.

Vraag het volgende aan de leerlingen. Wat zou volgens jullie een meerderheid van de mensen aanduiden als het tegenovergestelde van de volgende woorden of begrippen? De woorden aan de linkerkant worden op bord gezet. De leerlingen antwoorden wat volgens hen het meest voor de hand ligt. De verwachte antwoorden

worden aan de rechterkant van de pijlen geschreven. Belangrijk hierbij is dat bij de vraagstelling consequent het woord tegenovergestelde gebruikt wordt en niet de woorden tegengestelde of omgekeerde. Op die manier wordt er getracht dat de leerlingen bij het tweede gedeelte van de les niet meteen klakkeloos zullen terugvallen op hun voorkennis in verband met het gebruik van de woorden tegengestelde en omgekeerde binnen de wiskunde zodat ze het tweede gedeelte van de les met een open blik kunnen aanvangen. Een uitgewerkt voorbeeld van een mogelijk bordschema hierbij kan u verderop terugvinden. We zullen de notatie $A \rightarrow B$ gebruiken om B is het tegenovergestelde van A te noteren.

- Wat is het tegenovergestelde van dag? $\text{Dag} \rightarrow \text{Nacht}$
- Wat is het tegenovergestelde van nacht? $\text{Nacht} \rightarrow \text{Dag}$. Dit kan voorgesteld worden door een dubbele pijl te trekken tussen dag en nacht:
 $\text{Dag} \leftrightarrow \text{Nacht}$
- Wat is het tegenovergestelde van goed? $\text{Goed} \leftrightarrow \text{Slecht}$
- $\text{Kat} \leftrightarrow \text{Hond}$
- $\text{Wit} \leftrightarrow \text{Zwart}$
- $\text{Blauw} \rightarrow ???$. Geen duidelijke tegenovergestelde. Zeg hierbij het volgende: Je zou intuïtief wel opnieuw een kleur als antwoord willen. We zien dus dat we zouden willen dat het tegengestelde van een gegeven object ook het liefst uit een grotere overkoepelende verzameling komt waar het object ook deel van uitmaakt. Voorbeelden: we willen intuïtief dat het tegenovergestelde van een kat opnieuw een dier is en dat het tegenovergestelde van blauw opnieuw een kleur is. Hierdoor wordt straks een bruggetje mogelijk om bij de definitie van een groep te vertrekken vanuit het concept van een verzameling. Zie ook het uitgewerkte bordschema.
- $\text{Steen} \rightarrow ???$ Opnieuw is er hier geen duidelijk tegenovergestelde van het begrip steen.
- $\text{Muis} \leftrightarrow \text{Kat}$

Vanuit deze opgeschreven tegenovergestelden kunnen we al een paar meer algemenere wetten gaan afleiden die blijken te gelden in de intuïtieve wereld van de tegenovergestelden. Parafraseer deze in een tweede kolom op het bordschema.

- Wat kunnen we zeggen als we kijken naar dag en nacht? Tegenovergestelden lijken in paren voor te komen, waarbij het tegenovergestelde van het tegenovergestelde van een object opnieuw het originele object blijkt te zijn.
- Welke wetmatigheid kunnen we afleiden wanneer we kijken naar wit en blauw? Intuïtief zouden we willen dat het tegengestelde/omgekeerde van een gegeven object uit een grotere overkoepelende verzameling komt waar het object ook deel van uitmaakt.
- Wat hebben blauw en steen gemeen op het vlak van tegenovergestelden? Niet alles lijkt een tegengestelde of omgekeerde te hebben.
- Wat zou je nu antwoorden op de vraag wat het tegenovergestelde van een kat is? We zagen $\text{Muis} \leftrightarrow \text{Kat} \leftrightarrow \text{Hond}$: het concept kat lijkt twee verschillende tegengestelden te hebben.

Stel dat we het concept tegenovergestelde willen gaan idealiseren, veralgemenen of abstracter maken, helpen deze wetmatigheden ons dan verder of zouden ze ons eerder in de weg staan? Hoe zouden jullie het liefste hebben dat het abstracte concept van tegengestelde eruit zou zien in een wiskundige ideale wereld? Reageer op de antwoorden van de leerlingen. Indien nodig kunnen de onderstaande vragen gebruikt worden als richtingaanwijzers.

- Maakt het feit dat we binnen een overkoepelende verzameling gaan werken de zoektocht naar een tegenovergestelde van een object net makkelijker of net moeilijker? Makkelijker, want het aantal mogelijke kandidaten van het tegenovergestelde van een gegeven object wordt zo drastisch verkleind zodat het makkelijker is om uiteindelijk een tegenovergestelde te vinden. Conclusie: We willen werken binnen een verzameling.
- We willen het hebben over de ideale wiskundige wereld van de tegenovergestelden. Er blijken nu objecten te bestaan die geen duidelijk tegenovergestelde lijken te hebben. Verdienen zij hun plaats in de ideale wiskundige wereld van de tegenovergestelden of niet? Nee. Conclusie: In een ideale wereld zouden we ervoor willen zorgen dat er voor elk object een tegenovergestelde bestaat zodat de vraag "Wat is het tegenovergestelde van ... ?" steeds een antwoord heeft.
- We zagen dat sommige objecten meerdere verschillende tegenovergestelden lijken te hebben. Dit zou betekenen dat er in de ideale wiskundige wereld van tegenovergestelden soms geen eenduidig antwoord is op de vraag "Wat is het tegenovergestelde van ... ?". Is dat iets wat we liever wel of liever niet zien gebeuren? Alles zou veel duidelijker zijn als die vraag steeds beantwoord kon worden met 1 juist antwoord. In een ideale wereld zou het dus fijn zijn dat elk object maar één enkel tegenovergestelde zou hebben.

Voor het ideale bordschema wordt er met kolommen gewerkt, waarbij links de behandelde voorbeelden staan, in het midden de afgeleide wetmatigheden en rechts de situatie in een ideale wereld. Een voorbeeld van zo een mogelijk bordschema vindt u hieronder.

<u>Vrije associatie tegenovergestelden omgekeerden</u>		
<u>Voorbeelden</u>	<u>Wetmatigheden?</u>	<u>Ideale wereld invensen?</u>
Dag → Nacht Nacht → Dag ⇒ Dag ↔ Nacht Goed ↔ Slecht Kat ↔ Hond Wit ↔ Zwart Blauw ↔ ? Steen ↔ ? Huis ↔ Kat	→ tegenovergestelden omgekeerden komen in paren: dubbele pijlen → werken in overkoepelende verzameling: dieren, kleuren, ... → Niet alles heeft een tegenovergestelde of omgekeerde te hebben → Sommige objecten lijken twee verschillende tegenovergestelden / omgekeerden te hebben.	→ invase van een object komt uit grotere overkoepelende verzameling waar het object ook toe behoort → elk object heeft een invase → elk object heeft slechts één unieke invase.

2.1 Van willekeurige objecten naar getallen: (focus op operaties)

We gaan in dit gedeelte helemaal ‘back to basics’. Er wordt aan de leerlingen gevraagd om heel nauwkeurig en exact te kijken naar wat er gebeurt ook al gaat het hier over zaken die de leerlingen al lang kennen en voor hen vanzelfsprekend lijken. De leerlingen moeten bij dit gedeelte stilstaan bij wat er wiskundig precies gebeurt, ook al komen zij onbewust en vanuit hun intuïtie meteen tot het juiste antwoord. Als gedachtenexperiment kan er worden uitgegaan van het feit dat de leerlingen een computer dezelfde antwoorden moeten aanleren als diegene waar zij zelf vanuit hun intuïtie opkomen. Deze computer kan echter enkel twee gegeven getallen bij elkaar optellen of met elkaar vermenigvuldigen. Dit kunnen we schematisch weergeven. Keer eerst terug naar het concept functies. Een functie geeft je een voorschrift waarbij een x -waarde gekoppeld wordt aan een functiewaarde $f(x)$. We kunnen dus een functie eigenlijk ook gaan bekijken als een machine waar je langs de ene kant een getal instopt en waar langs de andere kant een nieuw getal uitkomt dat de bijbehorende functiewaarde van het inputgetal is. Wat deze functie daartussen doet om de output bij een gegeven input te berekenen kan bekeken worden als een soort van black box. Schematisch komt dit neer op het volgende:

Voorstelling functie als machine: input $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ black box \rightarrow output: $f(x) \in \mathbb{R}$

Voor onze computer kunnen we deze visie ook gebruiken, maar deze zal als input een koppel van twee getallen hebben, waarbij de output bijvoorbeeld de som of het product van deze twee getallen zal zijn. Dit komt neer op het volgende:

Voorstelling computer als machine: input $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow$ black box \rightarrow output: $f(x, y) \in \mathbb{R}$

Merk op dat deze computer op zich geen al te zotte toeren uithaalt. We steken er twee getallen in en er komt opnieuw een getal uit. We zullen dit later gaan veralgemenen door aan te nemen dat x en y elementen zijn van een gemeenschappelijke verzameling V . Als onze computer op een redelijke manier werkt verwachten we bijgevolg ook dat de output een element uit diezelfde verzameling V zal zijn. Veronderstel dat deze computer werkt zoals hierboven beschreven is en dat we deze een antwoord willen laten zoeken op de vraag “Wat is het tegenovergestelde van het getal 3?”, welk antwoord zou die dan moeten geven?

Think, pair, share: Wat is volgens jullie de tegenpool van het getal 3? Denk hierover zelf een minuutje na en verduidelijk daarna aan je buur waarom je dat denkt. \rightarrow Klassikale bespreking. Welk antwoord hadden jullie? Waarschijnlijk zal het meest gegeven antwoord -3 zijn. Waarom -3? Laat de leerling zijn of haar redenering achter deze intuïtie voorstellen. Wie had ook -3? Waarom dacht jij dat? Verwacht antwoord: een redenering die gebaseerd is op de gelijkheid $3 - 3 = 0$.

Is er iemand die een ander antwoord dan -3 had? Misschien had iemand $\frac{1}{3}$ of nog iets anders? Als iedereen -3 als tegenovergestelde van het getal 3 in gedachten heeft speelt de leerkracht advocaat van de duivel en zegt hij dat hij zelf eerder aan $\frac{1}{3}$ dacht. Kan iemand de redenering hierachter uitleggen? Waar ligt het verschil? Hierbij wordt de focus gelegd op de verschillende operaties die uitgeoefend kunnen worden op getallen, namelijk optellen en vermenigvuldigen, wat tot verschillende tegenovergestelden, namelijk -3 en $\frac{1}{3}$ leidt.

Wat is volgens jullie nu het tegenovergestelde van de volgende matrix?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De verwachte antwoorden zijn:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Waarom is dat zo volgens jullie? Welke operaties leiden tot deze tegenovergestelden? Antwoord: respectievelijk de optelling en vermenigvuldiging van matrices. Als we de computer zouden willen laten zoeken naar

de tegenovergestelde matrix van onze oorspronkelijke 2×2 -matrix, zou deze dan moeten beginnen zoeken in de ganse collectie van alle mogelijke matrices? Nee, we verwachten dat het tegenovergestelde van een 2×2 -matrix opnieuw een 2×2 -matrix zal zijn.

Wat misschien ook al kan gebeuren bij de vrije associatie rond tegenovergestelden in het eerste gedeelte is dat er een leerling is die bij het zoeken naar een tegenovergestelde het woord omgekeerd gaat opschrijven, zodat bijvoorbeeld 'tak' het tegengestelde wordt van 'kat'. Dit kan ook een manier zijn om de focus op verschillende mogelijke operaties te leggen. Deze leerling redeneert immers in termen van een operatie die te maken heeft met het fysiek neerschrijven van het woord 'kat'. Als dit in de klas voorvalt kan er in het bordschema van daarjuist al opgeschreven worden dat een object meerdere inversen kan hebben al naargelang de operatie die beschouwd wordt. 'Muis' en 'hond' kunnen daarentegen ook als tegengestelden van 'kat' bekeken worden in termen van een niet nader gespecificeerde operatie binnen de verzameling van de dieren.

2.2 Tegengestelde/omgekeerde getallen: (focus op eenheidselement en associativiteit)

Dus, voor de optelling zijn 3 en -3 volgens jullie tegenovergestelden. Waarom niet 3 en -4 bijvoorbeeld? Verwacht antwoord: $3 - 3 = 0$. Herinner dat we in ons gedachtenexperiment werkten met een computer die enkel twee getallen met elkaar kan optellen. Hoe kunnen we dit dan herschrijven? Schrijf dit als $3 + (-3) = 0$. Hierbij kan er expliciet stilgestaan worden bij de binariteit van de optelling als operatie: bij een optelling verwacht je immers altijd twee getallen die je met elkaar moet gaan optellen. De computer krijgt in geval dus twee reële getallen als input en berekent hierbij een overeenkomstige output dat ook een reël getal zal zijn. Waarom willen jullie toewerken naar 0 bij de optelling? Waarom is dit speciaal? Welke rol speelt het getal 0 bij de optelling? \rightarrow toewerken naar definitie van neutraal element. Wat gebeurt met onze computer als we nul als een van de twee inputgetallen gaan meegeven? De definitie van het getal 0 als eenheidselement voor de optelling wordt op het bord opgeschreven (met kwantoren: zie bordschema).

Hoe hadden we vanuit $3 + (-3) = 0$ de -3 als tegenovergestelde van 3 kunnen vinden? Hoe kunnen we het tegenovergestelde vinden van het getal 10, of een arbitrair getal $a \in \mathbb{R}$? Werk toe naar oplossen van vergelijkingen. Stel dat we het tegenovergestelde van 3 niet kenden voor de optelling, hoe zouden we dan de vergelijking $3 + x = 0$ gaan oplossen? Sta hierbij stil dat iedereen hierbij op het zicht ziet dat x gelijk moet zijn aan -3 , maar dat we eens helemaal back to basics gaan. Welke stappen moeten we de computer die enkel een optelling van twee getallen kan uitvoeren allemaal laten zetten om volledig op een bijna bewijstechnische manier aan te tonen dat x gelijk moet zijn aan -3 ? We vertrekken van $3 + x = 0$ en we willen daarbij het linkerlid en het rechterlid gelijkmatig gaan manipuleren zodat we het linkerlid kunnen neutraliseren en hier x uit kunnen halen. In het eerste jaar van het middelbaar onderwijs heb je daarvoor gewerkt met een algemene methode die we de balansmethode noemen. Think, pair, share: Laat de leerlingen eerst zelf nadenken welke stappen er allemaal gezet moeten worden bij het oplossen van die vergelijking met behulp van de balansmethode, laat hen dan onderling met hun buur daarover discussiëren om tot een klassikale discussie te komen. De benodigde stappen zijn achtereenvolgens: Langs links bij beide leden -3 optellen, daarna haakjes zetten rond de 3 en -3 , dat maakt samen 0 en $0 + x = x$ uit de definitie van neutraal element voor de optelling. Welke aannames of definities heb je dus eigenlijk allemaal onderbewust moeten gebruiken om deze simpele vergelijking te gaan oplossen? \rightarrow Leg de nadruk op de definitie van neutraal element en associativiteit (zoals aangegeven op het bordschema). Zorg er zeker voor dat er op het bord gewerkt wordt met een optelling/vermenigvuldiging langs links bij de balansmethode. Op die manier moet er geen commutativiteit gebruikt worden wat bij een optelling/vermenigvuldiging langs rechts wel het geval zou zijn.

Think, pair, share: Leg nu aan je buur uit hoe je deze stappen opnieuw kan zetten door aan te tonen dat 3 en $\frac{1}{3}$ elkaars tegenovergestelden zijn voor de vermenigvuldiging. \rightarrow Overloop klassikaal waarbij de definitie van 1 als neutraal element voor de vermenigvuldiging ook opgeschreven wordt (Focus op kwantoren

waar de leerlingen waarschijnlijk nog niet erg vertrouwd mee zijn). Zou je exact hetzelfde schema kunnen opstellen voor onze 2×2 -matrices van daarjuist? Welke matrices worden dan de neutrale elementen voor de optelling en de vermenigvuldiging? Hoe ga je delen door een matrix? Je vermenigvuldigt dan langs links met de inverse matrix. Lukt dit altijd? Nee, want niet elke matrix is inverteerbaar. Ook wordt er weer even expliciet stilgestaan bij de gebruikte associativiteit. Dit alles kan leiden tot het volgende bordschema:

Tegenovergestelden / Omgekeerde getallen

Tegenovergestelde / omgekeerde van 3?

$\Rightarrow 3 \leftrightarrow -3$ of $3 \leftrightarrow 1/3$

<p>$3 - 3 = 0$ $\Rightarrow 3 + (-3) = 0$ - optelling $\rightarrow 0?$ - eenheidselement / neutraal element: $\forall x \in \mathbb{R}: 0 + x = x + 0 = x$</p> <p>Opllossen vergelijking: $3 + x = 0$ $\Rightarrow -3 + (3 + x) = -3 + 0$ Associativiteit! $\Rightarrow (-3 + 3) + x = -3 + 0$ $\Rightarrow 0 + x = -3 + 0$ $0 =$ neutraal element optelling $\Rightarrow x = -3$</p>	<p>$3 \cdot 1/3 = 1$ - vermenigvuldiging. \rightarrow waarom 1? - eenheidselement / neutraal element: $\forall x \in \mathbb{R}: 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$</p> <p>Opllossen vergelijking: $3 \cdot x = 1$ $\Rightarrow 1/3 \cdot (3 \cdot x) = 1/3 \cdot 1$ Associativiteit! $\Rightarrow (1/3 \cdot 3) \cdot x = 1/3 \cdot 1$ $\Rightarrow 1 \cdot x = 1/3 \cdot 1$ $1 =$ neutraal element vermenigvuldiging $\Rightarrow x = 1/3$</p>
---	--

2.3 Toewerken naar de definitie van een groep

Think, pair, share: Blik voor jezelf eens terug op wat we vandaag allemaal al gedaan hebben. Denk terug aan het concept van een duck test die aangehaald werd bij het begin van deze les. Welke bevindingen, termen, concepten en regels uit deze les zijn er volgens jou het belangrijkste wanneer we een wiskundige beschrijving zouden willen plakken op de structuur van de ideale wereld van de tegenovergestelden? Probeer zelf eens te zoeken naar voorwaarden die we in onze duck test zouden moeten eisen waaraan deze structuur zou moeten voldoen. Discussieer vervolgens hierover met je buur. Daarna volgt er een klassikale bespreking. De leerkracht duidt in een andere kleur aan waar de concepten die de leerling opnoemt voorkomen op het bord. Ik verwacht dat de leerlingen zelf de volgende hoofdzaken gaan aanhalen:

- Tegenovergestelden \rightarrow Zeg dat we vanaf nu gaan spreken over inversen als overkoepelende term voor wat we hiervoor tegenovergestelden genoemd hebben.
- Neutrale elementen met hun veralgemeende definitie voor een algemene binaire operatie die afgeleid wordt aan de hand van de voorbeelden van 0 bij de optelling en 1 bij de vermenigvuldiging waarbij

er gewerkt wordt met een computer die twee elementen uit een verzameling V afstuurt op een ander element in een algemene verzameling V .

- associativiteit (misschien een duwtje in de rug hierbij nodig: bij het zoeken van de tegengestelde in vergelijkingvorm was associativiteit noodzakelijk als tussenstap om uiteindelijk de inverse te kunnen berekenen. Zonder associativiteit zou dit mogelijks in het water gevallen zijn. Hieruit blijkt dat associativiteit ook een kernconcept is.)
- verschillende operaties (toegepast op getallen en matrices: op dezelfde verzameling kan je verschillende operaties definiëren en die geven aanleiding tot andere neutrale elementen, zoals bij de optelling en de vermenigvuldiging van getallen het geval is.)

De leerkracht vat samen: We zagen dat we tegenovergestelden wilden gaan zoeken binnen een overkoepelende verzameling V . De definitie van een groep vertrekt bijgevolg van een verzameling V . Die verzameling staat niet op zichzelf, maar bevat ook een binaire operatie. Deze binaire operatie kan je bekijken als de computer van daarstraks. Deze computer neemt twee elementen uit V als input en geeft daar als output opnieuw een element uit V voor terug. Als deze verzameling tezamen met zijn binaire operatie een groep wil zijn dan moeten deze nog voldoen aan drie voorwaarden uit een duck test, die we vanaf nu groepsaxioma's gaan noemen. Deze drie voorwaarden uit onze duck test zullen zijn: de bewerking moet associatief zijn, er moet een neutraal element zijn binnen de verzameling en elk element van de verzameling moet een inverse hebben. De definitie van een groep kunnen we dus als volgt noteren. De leerkracht schrijft de onderstaande definitie van een groep op het bord.

Een **groep** $G, *$ is een verzameling G die voorzien is van een inwendige binaire bewerking $*$: $G \times G \rightarrow G$ waarbij voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- De bewerking $*$ is **associatief**: $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- $G, *$ heeft een **eenheidselement** of **neutraal element** e : $\exists e \in G : \forall x \in G : x * e = e * x = x$
- Elk element x van G heeft een **invers element**: $\forall x \in G, \exists y \in G : x * y = y * x = e$

2.4 Eenvoudige voorbeelden van groepen

Met welke groepen zijn we in deze lessenreeks al in aanraking gekomen? Welke verzamelingen met welke bewerkingen hebben we in deze les al gebruikt? Leerlingen redeneren mee en komen op het antwoord $\mathbb{Z}, +$ (of $\mathbb{R}, +$). Waarschijnlijk zullen ze ook \mathbb{Q}, \cdot of \mathbb{R}, \cdot vernoemen.

Think, pair, share: Zijn $\mathbb{N}, +$, $\mathbb{Z}, +$ en $\mathbb{R}, +$ en \mathbb{Q}, \cdot of \mathbb{R}, \cdot groepen? Denk terug aan de duck test: om een eend te zijn moet je eruitzien als een eend, zwemmen als een eend en kwaken als een eend, maar nu werken we niet met eenden maar met groepen en zijn deze drie voorwaarden de axioma's uit de definitie. Denk zelf een minuutje na, overleg dan met je buur. Daarna volgt een klassikale bespreking. Hieruit zou het inzicht moeten voortvloeien dat $\mathbb{Z}, +$ en $\mathbb{R}, +$ groepen zijn maar $\mathbb{N}, +$ niet omdat bijvoorbeeld het getal 2 voor de optelling geen inverse heeft binnen de verzameling van de natuurlijke getallen.

Think, pair, share: Voldoen \mathbb{Q}, \cdot en \mathbb{R}, \cdot aan de definitie van een groep? Denk zelf een minuutje na, overleg dan met je buur. Daarna volgt een klassikale bespreking. Hieruit zou het inzicht moeten voortvloeien dat \mathbb{Q}, \cdot en \mathbb{R}, \cdot geen groepen zijn omdat het getal 0 voor de vermenigvuldiging geen inverse heeft binnen de verzamelingen \mathbb{Q}, \cdot of \mathbb{R}, \cdot . Is 0 het enige getal dat op deze manier moeilijk doet? Ja. Hoe kunnen we dat dan oplossen zodat we toch een groep overhouden? Oplossing: neem het element 0 niet mee in de verzameling. Is er nu wel voldaan aan alle voorwaarden om een groep te zijn?

Kunnen jullie misschien zelf ook groepen van matrices bedenken? Hierbij moet tot de conclusie gekomen worden dat bij de matrixoptelling enkel matrices van dezelfde afmetingen als verzamelingen genomen mogen worden, want anders is de operatie niet goed gedefinieerd. Bij de matrixvermenigvuldiging moet er stilgestaan worden bij het feit dat elk element uit een groep ook een inverse moet hebben. Op die manier wordt er klassikaal geconcludeerd dat er enkel gekeken moet worden naar de vierkante matrices van een gegeven afmeting die inverteerbaar zijn en die dus een determinant verschillend van 0 hebben.

2.5 Terugkoppeling concept groep en intuïtie begin + beschouwingen definitie groep

Terugblik naar het begin van de les. De voorbeelden van daarjuist zijn allemaal voorbeelden van zuiver wiskundige objecten en verzamelingen die blijken te voldoen aan de definitie van een groep. Nu zijn er ook voorbeelden van verzamelingen met operaties die helemaal niet van wiskundige oorsprong zijn maar die toch voldoen aan de definitie van een groep. Herinneren jullie zich nog dat er in het begin gesproken werd over Rubiks kubussen en muzikale akkoorden? Wel, het blijkt dat deze allebei onderliggend ook op een abstractere manier steunen op een structuur die voldoet aan de definitie van een groep. Het volgende filmpje overloopt eerst opnieuw wat een groep is en linkt daarna Rubiks kubussen en muzikale akkoorden aan elkaar via hun onderliggende groepsstructuur. Bekijk het filmpje (duurtijd 4 min. 36) samen met de leerlingen:

<https://www.youtube.com/watch?v=FW2Hvs5WaRY>

In het begin van de les hebben we ook gezegd dat de invoering van het concept van een groep handig kon zijn om dingen te algemeen te bewijzen. Als we iets willen bewijzen in een specifieke groep kan het misschien zo zijn dat we dat bewijs kunnen leveren voor een algemene groep die voldoet aan de definitie waardoor de uitspraak meteen geldt voor alle groepen ter wereld. Denk bijvoorbeeld eens aan de volgende vraag: Hoeveel neutrale elementen zijn er in de groep $\mathbb{Z}, +$? Antwoord: 1, namelijk het element 0. Hoeveel neutrale elementen zijn er in de groep van inverteerbare 2×2 -matrices uitgerust met de matrixvermenigvuldiging als bewerking? Antwoord: 1, namelijk de overeenkomstige eenheidsmatrix. Dit doet ons vermoeden dat voor elke groep misschien wel geldt dat er steeds slechts 1 neutraal element is. Probeer eens in duo's op zoek te gaan naar een bewijs hiervoor. Ga hierbij uit van de volgende strategie. Stel dat er twee strikt verschillende neutrale elementen, zeg e en e' met $e \neq e'$ in een willekeurige groep $G, *$ zouden zijn, stel dan een redenering op aan de hand van de groepsaxioma's die bewijst dat e en e' aan elkaar gelijk moeten zijn. Laat de leerlingen hieraan werken. Als de leerkracht merkt dat de leerlingen het niet tot een goed eind brengen dan schrijft hij de regel $e = e' * e = e'$ op het bord. De leerkracht zegt daarbij dat deze regel in essentie het gewilde bewijs is, maar dat de leerlingen nu nog enkel klassikaal moeten verduidelijken waarom dit een bewijs is voor de uniciteit van het eenheidselement in een groep, waarbij de gelijkheidstekens worden becommentarieerd vanuit de groepsaxioma's.

Een volgend probleem dat in de weg zat in het begin van de les was de intuïtie rond muis \rightarrow kat \rightarrow hond, waarbij een object (kat) blijkbaar twee tegengestelden had. Dit was ook iets waar we niet zo blij mee waren. Het zou makkelijker zijn als elk element van een groep effectief maar één enkel invers element zou hebben. Hoe zit dat nu in de voorbeelden van groepen die we al tegengekomen zijn? Zijn er daar elementen van de groep te vinden die meer dan één inverse hebben of heeft elk element uit de groep slechts één inverse volgens jullie? Zou dat algemeen gelden in een groep? Zoja, dan is onze wens dat elk element maar één inverse zou mogen hebben zoals in het begin geformuleerd was al meteen ingewilligd door de axioma's van de groep zelf. Van hieruit kan overgegaan worden naar het bewijs van de uniciteit van de inverse in een groep. Naventant hoe makkelijk het bewijs van de uniciteit van het neutraal element verliep kan er gekozen worden om de leerlingen zelf te laten werken aan het bewijs of meteen klassikaal het bewijs te overlopen. Het bewijs ziet er als volgt uit: Stel dat er voor een element a uit een groep $G, *$ twee verschillende inversen zijn, zeg b en

b' met $b \neq b'$. Dan geldt:

$$a * b = a * b' = e \quad (1)$$

$$b * (a * b) = b * (a * b') \quad (2)$$

$$(b * a) * b = (b * a) * b' \quad (3)$$

$$e * b = e * b' \quad (4)$$

$$b = b' \quad (5)$$

In de eerste regel is de definitie van inverse gebruikt. Bij de tweede regel gebruik je een truc door beide leden langs links te vermenigvuldigen met b . Bij de derde regel wordt associativiteit gebruikt en bij de laatste twee regels wordt de definitie van het eenheidselement gebruikt. Vermoedelijk zal dit bewijs vrij moeizaam verlopen omdat de leerlingen niet vertrouwd zijn met het opstellen van bewijzen op basis van een verzameling van axioma's. Toch zou ik ervoor kiezen om dit bewijs in de les op te nemen omdat bijna exact hetzelfde bewijs later gebruikt kan worden wanneer er gesproken wordt over de structuur van Cayleytabellen als Latijnse vierkanten. In de eerste regel van het bovenstaande bewijs staat er dat $a * b = a * b' = e$ aangezien b en b' verondersteld worden van beiden inversen van a te zijn. Doorheen het bewijs wordt er echter niet meer expliciet gebruikt dat deze operaties gelijk zijn aan het eenheidselement. Bij de bespreking van de structuur van Cayleytabellen als Latijnse vierkanten kan dit bewijs dus zo goed als integraal overgenomen worden om te bewijzen dat er in eenzelfde rij of kolom van een Cayleytabel geen twee dezelfde elementen van de groep mogen staan.

Als er nog tijd over zou zijn kan er hierna ook nog expliciet ingegaan worden op het feit dat commutativiteit niet geëist wordt in de groepsaxioma's, hoewel dit voor sommige leerlingen misschien voor de hand ligt dat dit wél een onderdeel van de groepsaxioma's zou zijn. Eerder is al het voorbeeld van de groep van inverteerbare vierkante matrices met een gegeven afmeting aan bod gekomen. Hierbij kan aangetoond worden dat er voorbeelden van niet-commutatieve groepen bestaan. Een mogelijk tegenvoorbeeld is dus bijvoorbeeld de verzameling van reële inverteerbare 2×2 -matrices uitgerust met de matrixvermenigvuldiging, met het volgende tegenvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.3 Vragen logboek

Richtvragen logboek groepentheorie

Ben Vos (r0694274)

Maart 2022

1 Na lesblok 1

- Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Welke axioma's werden door spontaan door de leerlingen aangehaald bij de overgang naar de definitie van een groep en bij welke axioma's was er meer sturing nodig?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?
- Konden de leerlingen zelf correct verifiëren of een gegeven verzameling met een gegeven bewerking voldeed aan de groepsaxioma's? Wat verliep er goed en minder goed in dat gedeelte van de les?
- Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?
- Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van de les?

2 Na lesblok 2

- Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?
- Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?
- Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van de les?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over groepen van de gehele getallen modulo n in op dit moment? Waarom denkt u dat?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over Cayleytabellen in op dit moment? Waarom denkt u dat?
- Sprak het item van eindige groepen van gehele getallen modulo n de leerlingen volgens u meer of minder aan dan de eerder geziene voorbeelden van groepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?

3 Na lesblok 3

- Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?
- Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?
- Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van de les?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over isomorfismen in op dit moment? Waarom denkt u dat?
- Sprak het item van eindige groepen van matrices de leerlingen volgens u meer of minder aan dan de eerder geziene voorbeelden van groepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?

4 Na lesblok 4

- Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?
- Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?
- Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van de les?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over symmetriegroepen in op dit moment? Waarom denkt u dat?
- Sprak het item symmetriegroepen de leerlingen volgens u meer of minder aan dan de eerder geziene voorbeelden van groepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?

5 Na lesblok 5

- Welke delen van de les verliepen vlot en welke minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van de lessenreeks of niet? Waaruit leidt u dat af?
- Welke (eventueel hardnekkige) denkfouten hebt u opgemerkt bij de leerlingen tijdens de les?
- Welke reacties/gedragingen hebt u bij de leerlingen opgemerkt die erop kunnen wijzen dat ze geënthousiasmeerd/niet geënthousiasmeerd waren door het onderwerp van de les?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over permutaties en permutatiegroepen in op dit moment? Waarom denkt u dat?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over deelgroepen in op dit moment? Waarom denkt u dat?

- Sprak het item permutatiegroepen de leerlingen volgens u meer of minder aan dan de eerder geziene voorbeelden van groepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- In hoeverre hebben de leerlingen de onderlinge relaties tussen de verschillende geziene vormen van groepen door? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?

9.4 Interviewleidraad leerkrachten

Interviewleidraad leerkrachten

Les 1:

- In feedback: alle axioma's door de leerlingen zelf aangehaald. Link met oplossen van vergelijkingen heeft dit mogelijk gemaakt.
Zou u kunnen concluderen dat deze werkwijze effectief is om de leerlingen zelf de elementen uit de definitie van een groep te laten komen?
- Link met oplossen van vergelijkingen grootste struikelblok in de les? Oorzaken van deze moeilijkheden? Hoe zou dit volgens u weggewerkt kunnen worden?
Mogelijks: leerlingen staan te weinig stil bij algebraïsche achtergrond van alledaagse berekeningen. Balansmethode ligt te ver in het geheugen? Nood aan opfrissing leerstof eerste graad in latere jaren?
- Werkwijze via de intuïtieve exploratie van het concept tegengestelden blijkt vrij effectief te zijn, is deze ook efficiënt volgens u? Zou u opnieuw voor deze werkwijze kiezen nu u deze les gegeven heeft?
- U schrijft in uw feedback dat sommige leerlingen onzeker leken na de eerste les omdat ze niet gewend zijn om met abstracte begrippen te werken. Daarnaast schrijft u dat een aantal leerlingen in de war is door de lange aanloop vanuit de intuïtie. Dit zijn de leerlingen die graag wiskunde op een abstractere manier bedrijven.
-> Paradox: (abstracte) eerste les zorgt voor verwarring bij liefhebbers van abstractie?
-> Heeft dit gevoel zich doorgezet in de volgende lessen of is het verdwenen?

Les 2:

- Nagaan groepsaxioma's in een Cayleytabel doorheen de lessenreeks: verliep dit vlot?
- Problemen met associativiteit herkennen in Cayleytabel voor kandidaat-groep. Wat zijn hierbij volgens u de oorzaken en mogelijke oplossingen voor?
- In uw feedback schrijft u dat de leerlingen associativiteit met commutativiteit verwisselen. Wat zijn daar volgens u de oorzaken voor?
-> Mogelijk: zichtbaarheid in tabel? Larsen: focus op van links naar rechts lezen bemoeilijkt inzicht (cfr permutaties): sequentiële opvatting versus binaire operatie? Verschil tussen uitvoeren van bewerkingen in de echte wereld vs. Rekentechnische notatie? Geen precies informeel taalgebruik? Samen aangebracht in eerste graad: nood aan heropfrissing?

- Bekijk samen de eindterm. In hoeverre voldoen de leerlingen aan de noden van de eindterm na de eerste les, na de eerste twee lessen, na de ganse lessenreeks volgens u?
- U schrijft bij de feedback op les 3 dat de leerlingen vaak vergeten om de 0 weg te laten in een multiplicatieve groep. Vanwaar zou deze denkfout kunnen komen? Bij het uitzuiveren van Z_{12}^* is het argument van toewerken naar de geslotenheid van de bewerking immers centraal gesteld en veelvuldig aan bod gekomen?

Les 3:

- Bespreek voorstel verschillende mogelijke schrijfwijzen van oplossingen in C om isomorfismen aan te brengen: rechtvaardiging: nu aanbreng eindige groepen van matrices die in de rest van de lessenreeks gebruikt zullen worden.
- U schrijft dat een aantal leerlingen de lessenreeks interessanter begint te vinden in les 3 omdat het tastbaarder wordt terwijl andere leerlingen hunkeren naar praktische toepassingen. Heeft deze trend zich verdergezet in de rest van de lessenreeks? Welke praktische toepassingen zou u implementeren in deze lessenreeks?

Les 4 en 5 + overschouwend:

- U schrijft dat u bij les 4 verbaasd bent over hoeveel er van de leerlingen zelf gekomen is in deze les en dat ze deze les de interessantste uit de lessenreeks vonden. Voor de lessenreeks gaf u aan dat u het onderdeel over symmetriegroepen zelf abstract en een moeilijk onderdeel voor de leerlingen vond.
 - ➔ De reactie van de leerlingen op de les was dus verrassend voor u?
 - ➔ Van waar zou dat enthousiasme bij de leerlingen kunnen komen? Onderwerp/werkwijze?
 - ➔ Overschouwend: reageerden de leerlingen anders op deze lessenreeks dan op een andere lessenreeks in de extra uren wiskunde? Wat zijn de verschillen, zowel in positieve als negatieve zin?
- In de lessenreeks worden veel verschillende voorbeelden van groepen gegeven vanuit verschillende invalshoeken. Denkt u dat dit effectief is voor een lessenreeks als deze? Welke groepen of soorten van groepen sloegen het best aan bij de leerlingen? Waaruit leidt u dat af? Hebben de leerlingen de overeenkomsten tussen de verschillende soorten van groepen goed door volgens u?

- Denkt u dat deze lessenreeks achteraf gezien een goede implementatie is om leerlingen van het zesde middelbaar te laten kennismaken met groepentheorie? Waarom wel/niet?
- Wat vindt u van het abstractieniveau van de lessenreeks?
- De lessenreeks is nu uitgetest in een groep van sterke leerlingen die ervoor kiezen om 8 uur wiskunde in de week te hebben. De eindterm gaat straks van toepassing zijn op alle leerlingen met een sterk pakket wiskunde, bijvoorbeeld ook de richting die nu industriële wetenschappen heet. Welke verschillen in reacties van leerlingen op de lessenreeks verwacht u bij dat bredere publiek dat niet alleen bestaat uit leerlingen die specifiek voor wiskunde kiezen? Welke aanpassingen zou u in dit licht doorvoeren?
- Heeft u zelf nog onderwerpen waarover u het zou willen hebben?

9.5 Interviewleidraad leerlingen

Interviewleidraad leerlingen

- Wat is een groep? Kan je nog zeggen wat de definitie van een groep ook alweer was?
- Kan je nog eens het verschil uitleggen tussen de betekenissen van associativiteit en commutativiteit? Vanwaar zou een eventuele verwarring tussen de begrippen commutativiteit en associativiteit kunnen komen volgens jou?
- Voelde je dat groepentheorie een heel ander onderwerp is dan de onderwerpen uit je gewone lessen wiskunde? Was het buiten je comfortzone? Hoe voel je dat: andere manier van aanpak/studeren? Bevalt het je meer of minder dan anders?
- Heeft deze lessenreeks rond groepentheorie je interesse doen krijgen naar andere kamers van de zuivere wiskunde? Waarom wel/waarom niet?
- Ben je door deze lessenreeks nu afgeschrikt door de zuiver wiskunde of net niet?
- Welk deel van de lessenreeks vond je het meest/minst interessant? Waarom?
- Welk deel van de lessenreeks maakte je het meest/minst enthousiast? Waarom?
- Heeft deze lessenreeks je blik op de wiskunde als wetenschap veranderd?
- Hoe heb je gestudeerd voor de toets? Was je aanpak anders dan voor een 'gewone' toets wiskunde?

- Wat vind je zelf het moeilijkste: werken binnen één bepaalde soort groep of zoeken naar een isomorfisme tussen groepen? Kan je uitleggen waarom?
- Wat zijn je bedenkingen in verband met de instap van de lessenreeks door vanuit de intuïtie rond tegenovergestelden naar de definitie van een groep te gaan?
- Zou je het interessanter gevonden hebben als er meer meetkunde en meetkundige voorbeelden in de lessenreeks aan bod gekomen zouden zijn?
- Heeft deze lessenreeks rond groepentheorie een invloed gehad op je toekomstplannen naar het hoger onderwijs toe? Waarom wel/waarom niet?
- Heb je zelf nog zaken toe te voegen?

9.6 Opgestelde toets die afgenomen werd na de lessenreeks

Test vragen groepentheorie Ben Vos /22

Naam en klas:

Datum:

Los de onderstaande vragen op. Werk bij voorkeur je oplossingen uit op een apart blad, met uitzondering van vraag 1a waarbij er gevraagd wordt om de Cayleytabellen te vervolledigen.

- 1) Vraag rechtstreeks passend bij de eindterm: op 11 punten
conceptuele kennis: Cayleytabellen + groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n
procedurele kennis: rekenen in groepen + bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1		3	4	5	0
2	2	3	4	5		1
3	3	4		0		2
4	4	5	0	1	2	3
5		0	1	2	3	

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0		2	3	4	5
2	0	2	4	0		4
3	0	3		3		3
4	0	4	2	0	4	2
5		5	4	3	2	

- Vul de lege plaatsen aan in deze Cayleytabellen (1punt)
- Ga na of de kandidaat-groepen overeenkomstig met deze Cayleytabellen voldoen aan de definitie van een groep door na te kijken of er voldaan is aan de voorwaarden uit de definitie van een groep. Waarom zijn deze kandidaat-groepen wel of niet een groep? (5 punten)
- Indien de kandidaat-groep overeenkomstig met een van bovenstaande Cayleytabellen voldoet aan de definitie van een groep, is dat dan ook een commutatieve groep? Hoe kan je dat in het algemeen zien aan de Cayleytabel? (2 punten)
- Indien de kandidaat-groep overeenkomstig met een van bovenstaande Cayleytabellen niet voldoet aan de definitie van een groep kan men deze gaan uitdunnen zodat er uiteindelijk een groep overblijft. Welke elementen uit de kandidaat-groep mogen er blijven staan zodat er een groep met een zo groot mogelijk aantal elementen gevormd wordt vertrekkende van de oorspronkelijke kandidaat-groep? (2 punten)
- Wat is de inverse van het element 5 in de twee gevonden groepen? (1 punt)

- 2) Vraag bij symmetrie – en permutatiegroepen: (6 punten)

Beschouw het vierkant met de punten $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als hoekpunten. Net zoals in de les zullen we de hoekpunten een volgnummer van 1 tot en met 4 meegeven zodat de

nummering er als volgt uitziet: hoekpunt 1 = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, hoekpunt 2 = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, hoekpunt 3 = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en hoekpunt 4 = $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Met welke meetkundige symmetrie van het vierkant uit de groep $D_{4,\circ}$ komt de matrix de matrix $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ uit de groep $G_{4,\cdot}$ die gezien werd in de les overeen? Bereken hierbij eerst welke hoekpunten op welke hoekpunten worden afgestuurd door deze matrix bij een vermenigvuldiging langs links. (2 punten)
- De matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beeldt het hoekpunt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ af op $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ op $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ op $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ op $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Met welke permutatie uit de groep $S_{4,\circ}$ komt deze matrix dan overeen? Noteer deze permutatie in matrixvorm. (2 punten).
- Met welke symmetrie van het vierkant uit de groep $D_{4,\circ}$ komt de permutatie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ uit de groep $S_{4,\circ}$ overeen? (2 punten)

3) Vraag bij deelgroepen en isomorfismen: 3 punten

Een persoon met een interesse voor groepentheorie kijkt naar de Cayleytabel van de groep $G_{4,\cdot}$ en herkent linksboven in het aangeduide deel van de Cayleytabel de groep $\mathbb{Z}_4, +$. Deze persoon doet hierbij de volgende uitspraak: " $\mathbb{Z}_4, +$ is een deelgroep van de groep $G_{4,\cdot}$ ". Deze uitspraak is echter niet volledig correct. Toch schuilt er op een bepaalde manier een vorm van waarheid in deze uitspraak.

- Verklaar waarom $\mathbb{Z}_4, +$ nooit een deelgroep van $G_{4,\cdot}$ kan zijn. (1 punt)
- Verbeter de uitspraak " $\mathbb{Z}_4, +$ is een deelgroep van de groep $G_{4,\cdot}$ " zodat de grond van waarheid over de overeenkomst tussen de blauwe kader in de Cayleytabel van $G_{4,\cdot}$ en de groep $\mathbb{Z}_4, +$ op een correcte manier naar voren komt in de verbeterde uitspraak. (2 punten)

4) Vraag bij deelgroepen: 2 punten

Zoek zelf een deelgroep van $\mathbb{Z}, +$ die een oneindig aantal elementen bevat en die verschillend is van $\mathbb{Z}, +$ zelf. (2 punten)

Bijlagen: De Cayleytabellen van $G_{4,\cdot}$ en $\mathbb{Z}_4, +$:

*	H++	N-+	H--	N+-	H-+	H+-	N--	N++
H++	H++	N-+	H--	N+-	H-+	H+-	N--	N++
N-+	N-+	H--	N+-	H++	N--	N++	H+-	H-+
H--	H--	N+-	H++	N-+	H+-	H-+	N++	N--
N+-	N+-	H++	N-+	H--	N++	N--	H-+	H+-
H-+	H-+	N++	H+-	N--	H++	H--	N+-	N-+
H+-	H+-	N--	H-+	N++	H--	H++	N-+	N+-
N--	N--	H-+	N++	H+-	N-+	N+-	H++	H--
N++	N++	H+-	N--	H-+	N+-	N-+	H--	H++

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Oplossingen + voorstel puntenverdeling

Vraag 1)

a) Ingevulde Cayleytabellen: (1 punt)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

- b) De linkse kandidaat-groep, $\mathbb{Z}_6, +$, voldoet aan de definitie van een groep: verzameling + bewerking, inwendig, associatief, neutraal element, inverse elementen: alle voorwaarden zijn voldaan. (4 punten voor het benoemen en nagaan van inwendigheid, associativiteit, neutraal element en inverse elementen).
De rechtse kandidaat-groep voldoet niet aan de definitie van een groep (2 punten voor een correct tegenvoorbeeld waarom het niet aan de definitie voldoet).
Mogelijke verklaring: het element 0 of het element 2 heeft geen inverse.
- c) De linkse groep is inderdaad commutatief aangezien de Cayleytabel de diagonaal als spiegelas heeft (2 punten).
- d) Enkel de elementen 1 en 5 mogen blijven staan en vormen samen een groep voor de vermenigvuldiging modulo 6. (2 punten).
Mogelijke verklaring: element per element gaan checken op inwendigheid in de Cayleytabel of via het criterium van onderlinge ondeelbaarheid met 6.
- e) Het invers element van 5 in de linkse groep is 1 en het invers element van 5 in de nieuw gevonden rechtergroep is 5.

Vraag 2)

- a) De matrix komt overeen met een rotatie over 180 graden.
Berekening: zie scan hiernaast. (2 punten: 1 punt voor de correcte berekening van waarop de

Handwritten calculations:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagram: A coordinate system with x and y axes. Four points are marked: 1 at (1,1), 2 at (1,-1), 3 at (-1,-1), and 4 at (-1,1). Arrows show a 180-degree rotation from point 1 to 3, 2 to 4, 3 to 1, and 4 to 2.

Text: Rotatie over 180°
rotatie fimpje: P2

hoekpunten afgestuurd worden en 1 punt voor de correcte benoeming als rotatie over 180 graden.

- b) De matrix komt overeen met de permutatie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. (2punten)
- c) De permutatie komt overeen met de spiegeling μ_1 uit het filmpje, de spiegeling waarbij de verticale middelloodlijn op de horizontale lijnstukken van het vierkant als spiegelas gebruikt wordt. (2 punten)

Vraag 3)

- a) De uitspraak is niet correct. Om een deelgroep te zijn moet je werken met een deelverzameling van je oorspronkelijke verzameling en met dezelfde bewerking. Dat is hier niet geval (1 punt).
- b) De structuur van de Cayleytabel overeenkomstig met de eerste 4 elementen in de groep G_4, \cdot is daarentegen wel gelijk aan de structuur van de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4, +$. De groep G_4, \cdot heeft dus een deelgroep die isomorf is met $\mathbb{Z}_4, +$ maar $\mathbb{Z}_4, +$ zelf is geen deelgroep van G_4, \cdot . (2 punten: 1 punt voor correcte plaatsing van het woord deelgroep in de verbeterde zin en 1 punt voor de correcte introductie van het begrip isomorfisme in de zin).

Vraag 4)

Elke deelgroep van $\mathbb{Z}, +$ met een oneindig aantal elementen is een correct antwoord dat 2 punten oplevert.

Het verwachte antwoord is de verzameling van veelvouden van een vast getal uitgerust met de optelling, bijvoorbeeld $2\mathbb{Z}, + = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}, +$ of $3\mathbb{Z}, + = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}, +$

9.7 Resultaten toets klasgroepen A en B

Resultaten klasgroep A

Leerling	Vraag 1a /1	Vraag 1b /5	Vraag 1c/2	Vraag 1d /2	Vraag 1e /1	Vraag 2a/2	Vraag 2b/2
1	1	5	2	0,5	1	1,5	2
2	1	4	1	2	0	2	2
3	1	5	2	2	1	1,5	2
4	1	5	2	2	1	2	2
5	1	5	2	0,5	0	1,5	2
6	1	4	2	1	1	2	2
7	1	5	2	1	1	2	2
8	1	5	2	1	1	1,5	2
9	1	5	2	1	0,5	2	2

Vraag 2c/2	Vraag 3a/1	Vraag 3b /2	Vraag 4 /2	Totaal /22	percentage	
2	1	1,5	0	17,5	0,7954545	
2	1	2	2	19	0,8636364	
2	1	0	0	17,5	0,7954545	
2	1	0	0	18	0,8181818	
1,5	1	2	2	18,5	0,8409091	
0,5	1	0	0	14,5	0,6590909	
2	1	2	0	19	0,8636364	
2	1	0	2	18,5	0,8409091	
2	1	2	0	18,5	0,8409091	
			gemiddelde	17,88889	gemiddelde	0,8131313
			mediaan	18,5	mediaan	0,8409091
			st.dev	1,307622	st.dev	0,0594374

Resultaten toets klasgroep B

vraag:	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	
max:		1	5	2	2	1	2	2	2
II 1		1	5	2	1,5	1	1,5	2	2
II 2		1	3	2	1,5	1	2	2	2
II 3		1	3	2	0	0	2	2	2
II 4		1	3,5	1,5	1	1	1	2	0
II 5		1	3,5	2	2	1	2	2	2
II 6		1	3,5	2	2	1	2	2	0
II 7		1	4	0	0	0	2	2	2
II 8		1	3,5	1	2	1	2	2	2
II 9		1	3,5	2	2	0,5	2	2	2
II 10		1	3,5	2	2	1	2	2	2
II 11		1	5	2	1	0,5	2	2	2
II 12		1	3	1	1	0,5	0,5	2	2
II 13		1	5	1	2	1	2	2	2

3a	3b	4 TOT		percentage	
		2 /22			
1	2	0	18	0,81818182	
1	1	0	17,5	0,79545455	
1	2	0	14	0,63636364	
1	1	0	14	0,63636364	
1	2	0	17,5	0,79545455	
0	0	0	13,5	0,61363636	
1	0	0	12	0,54545455	
1	2	0	17,5	0,79545455	
1	2	2	20	0,90909091	
1	1	0	17,5	0,79545455	
1	1	0	17,5	0,79545455	
1	1	0	13	0,59090909	
1	1	0	18	0,81818182	
		gemiddelde	16,15385	gemiddelde	0,73426573
		mediaan	17,5	mediaan	0,79545455
		st.dev	2,388954	st.dev	0,10858881

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
Celestijnenlaan 200H bus 2100
3000 LEUVEN, BELGIË
tel. + 32 16 32 14 01
www.kuleuven.be

